Fö 2 - TMEI01 Elkraftteknik
Trefas effektberäkningar

Christofer Sundström

23 januari 2019

Outline

Effekt: Grunder

Betrakta en impedans som har en spänning U över sig. Den komplexa effekten (skenbara effekten) blir då (jmf med $P = \frac{U^2}{R}$):

- Resistans:

$$S = \frac{U^2 e^{j0^\circ}}{Re^{j0^\circ}} = \frac{U^2}{R} e^{j0^\circ}$$

- Spole (induktor):

$$S = \frac{U^2 e^{j0^\circ}}{j\omega L} = \frac{U^2 e^{j0^\circ}}{\omega L e^{j90^\circ}} = \frac{U^2}{\omega L} e^{-j90^\circ}$$

- Kondensator:

$$S = \frac{U^2 e^{j0^\circ}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{U^2 e^{j0^\circ}}{\frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}} = U^2 \omega C e^{j90^\circ}$$

Aktiv, reaktiv och skenbar effekt samt effektfaktor

Effektbegrepp - (vad är egentligen komplex effekt?)

- Momentan effekt skrivs: $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \cdot \hat{i}\sin(\omega t - \varphi)$
- P = Aktiv effekt, dvs medelvärdet av den momentant utvecklade effekten
- Vi har att $P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$.
  Härledning: $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{\hat{u}\cdot\hat{i}}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cdot[\sin(\omega t)\cos(\varphi) - \cos(\omega t)\sin(\varphi)]\,dt =$
  $\Big/ \int_0^T \sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t) = 0 \Big/ = \frac{\hat{u}\cdot\hat{i}}{T}\cdot\cos(\varphi)\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{\hat{u}\cdot\hat{i}}{T}\cdot\cos(\varphi)\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt =$
  $\frac{\hat{u}\cdot\hat{i}}{T}\cdot\frac{T}{2}\cdot\cos(\varphi) = \frac{\hat{u}\cdot\hat{i}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\cos(\varphi) = U\cdot I\cdot\cos(\varphi)$
  där $\cos\varphi$ kallas effektfaktorn.
- Q = Reaktiv effekt, en hjälpstorhet som håller reda på effekt som flödar **fram och tillbaka**
- $S = P + j\cdot Q$ - Komplex effekt

Komplex effekt

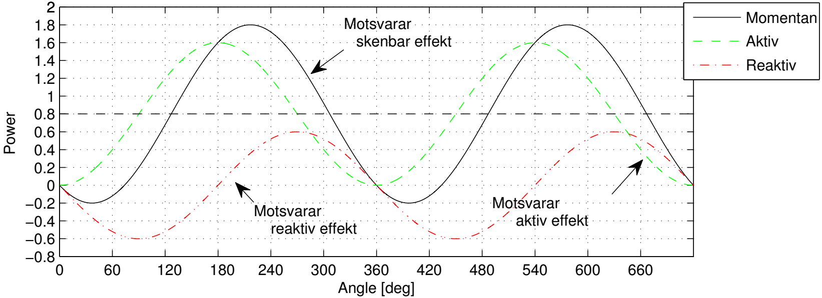
P är medelvärde, Q är mängden som flödar fram och tillbaka, S är den skenbara effekten

Aktiv, reaktiv och skenbar effekt samt effektfaktor

Betrakta en krets bestående av en spänningskälla, $\bar{U} = 1$ V, och en komplex last $\bar{Z} = 0.8 + j \cdot 0.6$, dvs $\bar{I} = 1e^{-j37^\circ} A$. Den momentana effekten är

$$
\begin{aligned}
p(t) = u(t) \cdot i(t) &= \hat{u}\sin(\omega t) \cdot \hat{i}\sin(\omega t - \varphi) = 2 \cdot \sin(\omega t)\sin(\omega t - 37^\circ) \\
&= /\text{Se t.ex. härledning ovan}/ = p_A(t) + p_R(t) \\
p_A(t) &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot (1 - \cos(2\omega t)) \\
p_R(t) &= -U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t)
\end{aligned}
$$

Notera: cos och sin är fasförskjutna $90^\circ \implies$ vi representerar P och Q som visare med 90° vinkelskillnad.

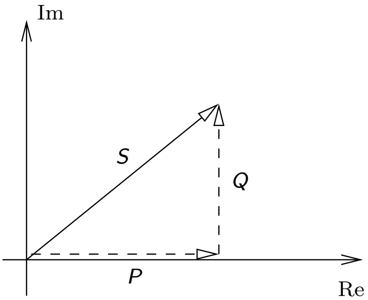


Aktiv, reaktiv och skenbar effekt samt effektfaktor

Betrakta en krets bestående av en spänningskälla, $\bar{U} = 1$ V, och en komplex last $\bar{Z} = 0.8 + j \cdot 0.6$, dvs $\bar{I} = 1e^{-j37^\circ} A$. Den momentana effekten är

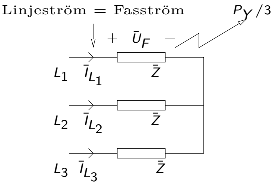
$$
\begin{aligned}
p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \hat{u}\sin(\omega t) \cdot \hat{i}\sin(\omega t - \varphi) = 2 \cdot \sin(\omega t)\sin(\omega t - 37^\circ) \\
&= /\text{Se t.ex. härledning ovan}/ = p_A(t) + p_R(t) \\
p_A(t) &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot (1 - \cos(2\omega t)) \\
p_R(t) &= -U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t)
\end{aligned}
$$

Notera: cos och sin är fasförskjutna $90^\circ \implies$ vi representerar P och Q som visare med 90° vinkelskillnad.



Trefaseffekt: Y-koppling

Betrakta en symmetrisk Y-koppling (lika stora laster i varje gren)

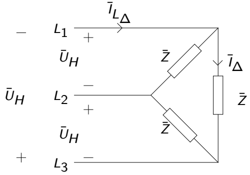


- En tredjedel av effekten utvecklas i varje resistans/kretselement
- Spänningen över lasterna är fas-spänningen U_F
- Strömmen genom lasterna är linjeströmmen I_L

$$P_{Y,3\text{fas}} = 3 \cdot U_F \cdot I_L \cos(\varphi) = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)$$

Trefaseffekt: D-koppling

Betrakta en symmetrisk D-koppling (lika stora laster i varje gren)



- P.s.s. som för Y-koppling utvecklas en tredjedel av effekten i varje gren
- Spänningen över lasterna är huvud-spänning U_H
- Strömmen genom lasterna är fasströmmen I_Δ

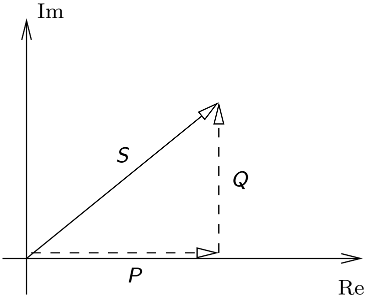
$$P_{\Delta,3\text{fas}} = 3 \cdot U_H \cdot I_\Delta \cdot \cos(\varphi) = 3 \cdot U_H \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)$$

Slutsats: Trefaseffekten för både Y- och D-kopplingar skrivs

$$P_{3\text{fas}} = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)$$

Trefaseffekt: Sammanfattning

Total aktiv effekt:	$P_{3\text{fas}} = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)$	W
Total reaktiv effekt:	$Q_{3\text{fas}} = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \sin(\varphi)$	VAr
Total skenbar effekt:	$S_{3\text{fas}} = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L$	VA



Alternativ: Antag att $\bar{Z} = R + j \cdot X$

$$P_{3\text{fas}} = 3 \cdot R \cdot I^2$$

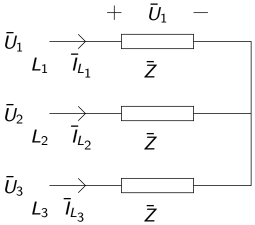
$$Q_{3\text{fas}} = 3 \cdot X \cdot I^2$$

$$S_{3\text{fas}} = 3 \cdot |\bar{Z}| \cdot I^2$$

S har samma vinkel φ som strömmens förhållande till spänningen.

Beräkningsexempel 1.7

Till ett symmetriskt trefassystem med huvudspänningen 220 V anslutes via korta ledningar en Y-kopplad last med impedanserna $\bar{Z} = 6 + j \cdot 8$ $[\Omega]$



Beräkna:

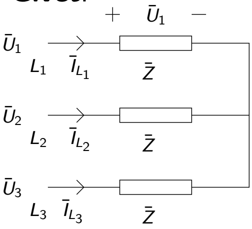
a) Linjeströmmen I_L i varje fas

b) Den i lasten utvecklade effekten P

c) Effektfaktorn $\cos(\varphi)$

Beräkningsexempel 1.7

Givet:



$\bar{Z} = 6 + j \cdot 8\ \Omega \Rightarrow Z = 10$, dvs 345-triangel
$U_H = 220\ V \Rightarrow U_F = 127\ V$
Symmetrisk last

Sökt: **a)** I_L, **b)** $P_{3\text{fas}}, Q_{3\text{fas}}, S_{3\text{fas}}$, **c)** $\cos(\varphi)$

Lösning:

a)
$$I_L = \frac{U_F}{|\bar{Z}|} = \frac{U_H/\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{220/\sqrt{3}}{10} = 12.7\ A$$

b)
$$P_{3\text{fas}} = 3 \cdot R \cdot I_L^2 \Rightarrow P_{3\text{fas}} = 3 \cdot 6 \cdot 12.7^2 = 2903\ W$$
$$Q_{3\text{fas}} = 3 \cdot X \cdot I_L^2 \Rightarrow Q_{3\text{fas}} = 3 \cdot 8 \cdot 12.7^2 = 3871\ VAr$$
$$S_{3\text{fas}} = \sqrt{P_{3\text{fas}}^2 + Q_{3\text{fas}}^2} = 4839\ VA \quad (\text{alt.} S_{3\text{fas}} = 3 \cdot Z \cdot I^2)$$

c)
$$\cos(\varphi) = \frac{P_{3\text{fas}}}{S_{3\text{fas}}} = \frac{2903}{4839} = 0.6$$

Beräkningsexempel 1.7

Alternativ lösning:

a) Lös på samma sätt

c) och b)

$$P_{3\text{fas}} = S_{3\text{fas}} \cdot \cos(\varphi), \text{med}$$

$$S_{3\text{fas}} = 3 \cdot U_F \cdot I_L = \Big/ U_F = \frac{U_H}{\sqrt{3}} \Big/ = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L$$

$$= \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 12.7 = 4839 VA$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = 53.1^\circ \Rightarrow \cos(\varphi) = 0.6$$

$$P_{3\text{fas}} = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 12.7 \cdot 0.6 = 2903 \ W$$

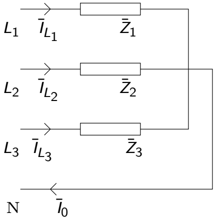
Beräkningsexempel 1.22 d

Till ett 380/220 V, 50Hz nät anslutes följande: Mellan fas och nolledaren en resistans på 44 Ω. Mellan fas 2 och nolledaren en spole med induktansen 0.0955 H och resistansen 40 Ω. Mellan fas 3 och nolledaren en resistans på 30 Ω och en kondensator med kapacitansen 79,6 μF

Uppgifter:

a) Beräkna linjeströmmarna

d) Beräkna den från nätet uttagna totala aktiva och reaktiva effekten



Beräkningsexempel 1.22d

a) $I_{L,1} = 5$ A; $I_{L,2} = 4,4$ A; $I_{L,3} = 4,4$ A (från Fö 1)

d) Beräkna totala aktiva och reaktiva effekten från nätet (Observera att I och $|\bar{I}|$ betecknar samma sak)

$$
\begin{aligned}
P_{Tot} &= R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 = /\bar{Z}_2 = 50(0.8 + j \cdot 0.6)/ \\
&= 44 \cdot 5^2 + 40 \cdot 4.4^2 + 30 \cdot 4.4^2 = \\
&= 1100 + 774.7 + 580.8 = 2.5\ kW \\
Q_{\mathrm{Tot}} &= \omega L |\bar{I}_2|^2 - \frac{1}{\omega C} |\bar{I}_3|^2 = 30 \cdot 4.4^2 - 40 \cdot 4.4^2 = \\
&= 580.8 - 774.4 = -194 VAr
\end{aligned}
$$

Faskompensering

- Strömvärmeförluster dimensionerar den maximala överföringskapaciteten hos t.ex. en ledare eller transformator. Dessa beror på strömmens storlek.
- För ett visst effektbehov hos slutkunden (Aktiv effekt) är det därför önskvärt att minimera den reaktiva effekten så att strömmens storlek minimeras. (Vi har ju $P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$)
- Enligt tidigare svenska normer gällde att $Q \leq 0.75P$.

Man brukar säga att induktanser förbrukar reaktiv effekt medan kapacitanser genererar kapacitiv effekt. Följaktligen har vi

- Kapacitans: $Q < 0$, (Vi har ju $\bar{Z} = \frac{-j}{\omega C}$ för en kapacitans)
- Induktans: $Q > 0$

(Om tecknen känns konstiga: Notera att $P > 0$ oftast betyder att effekt förbrukas i en last)

Faskompensering

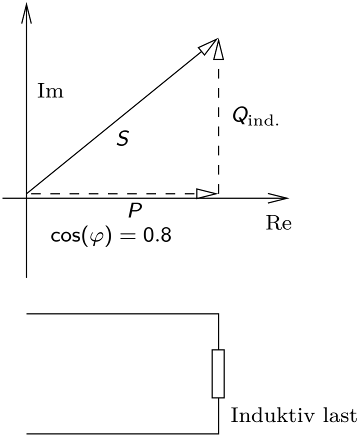
Faskompensering

För att minska den reaktiva effekten hos en förbrukare kan effekten genereras på plats. Detta kallas faskompensering.

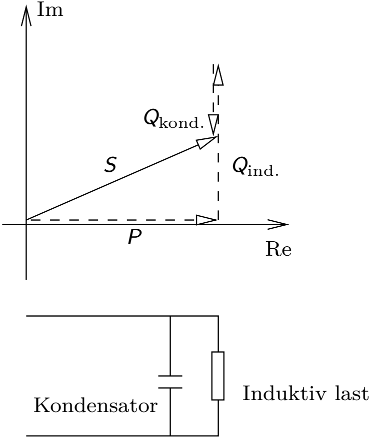
- När man vill påverka $\cos(\varphi)$ används parallellkopplade kondensatorer, eller **shunt**-kondensatorer.
- När man vill förbättra spänningsfallet hos en ledare används **serie**-kondensatorer.

Faskompensering: Exempel på parallellkopplad kondensator

Före kompensering



Efter kompensering

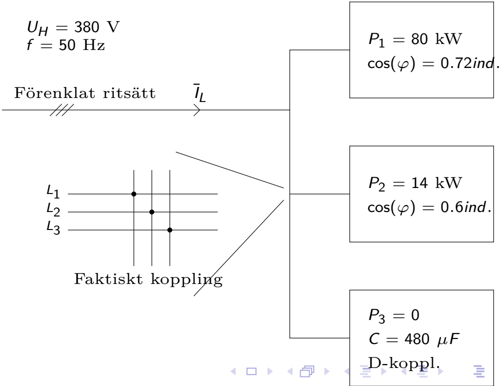


Parallellkopplad kondensator

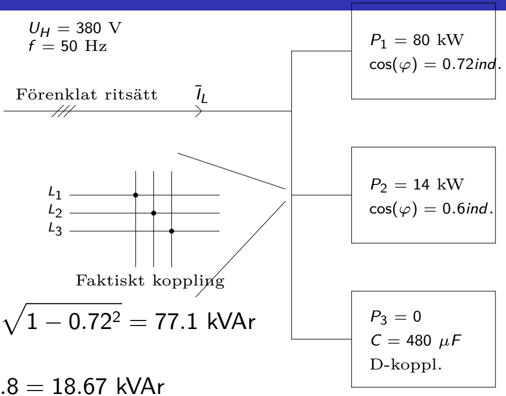
Vid parallellkoppling påverkas inte den aktiva effektförbrukningen P eftersom spänningen över den induktiva lasten är densamma

Beräkningsexempel 5.8

I en maskinanläggning som matas från ett 50Hz, 380 V trefasnät förbrukas 80 kW. De drivande maskinernas resulterande effektfaktor är 0,72 ind. Parallellt med dessa finns också installerat ett kondensatorbatteri bestående av tre lika stora D-kopplade kondensatorer på vardera 480 μF. Man vill sätta in ytterligare en maskin som kommer att kräva en effekt på 14 kW och med effektfaktorn 0,6 ind. Hur stor ström kommer anläggningen att dra från nätet och vad blir effektfaktorn för hela anläggningen?



Beräkningsexempel 5.8



Givet:

P_1, P_2, U_H, o.s.v. (se figur)

Sökt: Beräkna I_L och $\cos(\varphi_{\text{Tot}})$

Lösning: Vi har att

$$P_{\text{Tot,3fas}} = P_1 + P_2 + P_3 = $$
$$= 80 + 14 + 0 = 94 \text{ kW}$$

$$Q_{\text{Tot,3fas}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \cdots$$

$$Q_1 = \frac{P_1}{\cos(\varphi_1)} \sin(\varphi_1) = \frac{80}{0.72}\sqrt{1 - 0.72^2} = 77.1 \text{ kVAr}$$

$$Q_2 = \frac{P_2}{\cos(\varphi_2)} \sin(\varphi_2) = \frac{14}{0.6} 0.8 = 18.67 \text{ kVAr}$$

$$Q_3 = -3 \cdot U_H^2 \cdot \omega C = 3 \cdot 380^2 \cdot 100\pi \cdot 480 \cdot 10^{-6} = -65.3 \text{ kVAr}$$

$$\cdots = 77.1 + 18.67 - 65.3 \text{ kVAr} = 30.6 \text{ kVAr}$$

$$S_{\text{Tot,3fas}} = \sqrt{P_{\text{Tot,3fas}}^2 + Q_{\text{Tot,3fas}}^2} = 98.8 \text{ kVA}$$

Vi får därför $S = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \Rightarrow I_L = \frac{S_{\text{Tot,3fas}}}{\sqrt{3} \cdot U_H} = 150$ A och

$\cos(\varphi_{\text{Tot}}) = \frac{P_{\text{Tot,3fas}}}{S_{\text{Tot,3fas}}} = \frac{94}{98.8} = 0.951$ ind.

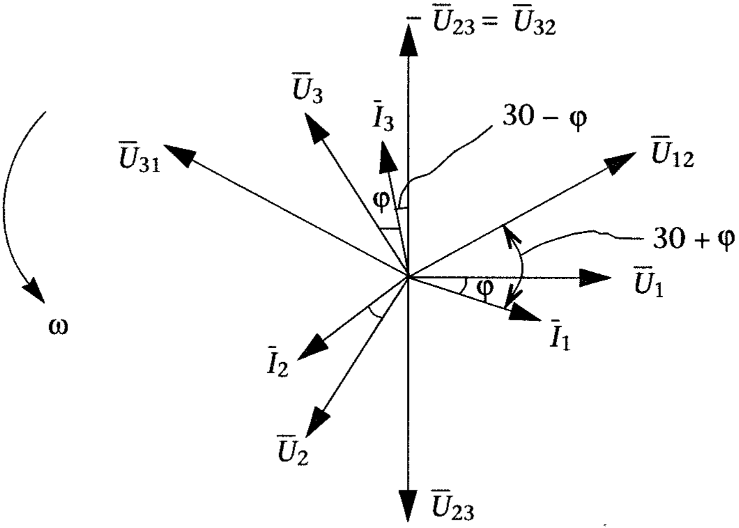
Mätning av effekt: Tvåwattmetermetoden

- Trick för att slippa 3 wattmetrar
  - 3 wattmerar, en för varje fas, fungerar alltid!
  - 1 wattmeter räcker om lasten är symmetrisk.
  (Vi kan ju multiplicera med 3)
- Metoden fungerar även i osymmetriskt belastade system vid allmän kurvform (dvs även vid icke-sinus).
- Kräver att nolledare saknas i systemet.

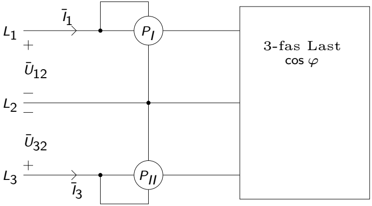
Härledning: Kom ihåg definitionen av momentan effekt $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. För tre faser har vi

$$
\begin{aligned}
p_{3\text{fas}}(t) &= u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 = /\text{Vilket kan skrivas som}/ = \\
&= \underbrace{(u_1 - u_2)}_{u_{12}} \cdot i_1 + \underbrace{(u_3 - u_2)}_{u_{32}} \cdot i_3 + u_2 \cdot \underbrace{(i_1 + i_2 + i_3)}_{=0 \text{ om nolla saknas}} = \\
&= u_{12} \cdot i_1 + u_{32} \cdot i_3
\end{aligned}
$$

Mätning av effekt: Tvåwattmetermetoden



Mätning av effekt: Tvåwattmetermetoden



- $$P_I = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos(30^\circ + \varphi)$$
  $$P_{II} = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos(30^\circ - \varphi)$$
- $$P_I + P_{II} = U_H \cdot I_L \cdot \big(\cos(\varphi)\cos(30^\circ) - \sin(\varphi)\sin(30^\circ) + \cos(\varphi)\cos(30^\circ) + \sin(\varphi)\sin(30^\circ)\big) = \sqrt{3} \cdot U_H \cdot I_L \cdot \cos(\varphi) = P_{3\text{fas}}$$
- $$P_{II} - P_I = \cdots = U_H \cdot I_L \cdot \sin(\varphi) = \frac{Q_{3\text{fas}}}{\sqrt{3}}$$
- $$\tan(\varphi) = \frac{Q_{3\text{fas}}}{P_{3\text{fas}}} = \sqrt{3} \cdot \frac{P_{II} - P_I}{P_{II} + P_I}$$
- **Överkurs:** Vid användning av tvåwattmeter-metoden kan ibland P_I eller P_{II} bli negativt. Alla wattmetrar kan inte hantera detta utan visar siffror utan tecken. Ibland måste därför tecknet på P_I eller P_{II} kastas om för att få rätt värden.