

# TSFS06 Diagnos och övervakning

## Föreläsning 7 - Olinjär residualgenerering

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik  
Linköpings universitet  
erik.frisk@liu.se

2017-04-26

1

### Konsistensrelationer vs. observatörer

Betrakta den lilla modellen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

Design av residualgenerator via konsistensrelation

$$\dot{y} - ay - cbu = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{p + \alpha} [(p - a) \quad -cb] \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

med tillståndsvariabel  $w = r - y$  så får man tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\alpha w - (a + \alpha)y - cbu \\ r &= y + w\end{aligned}$$

3

### Översikt

- Introduktionsexempel
- Olinjära observatörer
  - Olinjära observatörer
  - Olinjära observatörer för diagnos
  - Huvudproblematik och två viktiga specialfall
- Olinjära konsistensrelationer
- Observatörer vs. konsistensrelationer
- Två avslutande designexempel

2

### Observatör

En konsistensrelation för systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

togs fram genom att *eliminera* den obekanta variabeln  $x$ . En annan ansats är att skatta  $x$  och använda det värdet.

Observatörer kallas filter som skattar obekanta tillståndsvariabler i dynamiska system. Ett enkelt linjärt fall

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu & \Rightarrow & \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ y &= Cx\end{aligned}$$

I observatören återkopplas  $y - \hat{y} = y - C\hat{x}$ , matrisen  $K$  är observatörsförstärkningen.

4

Betrakta igen den lilla modellen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

### Design av residualgenerator via observatör

En motsvarande design via observatörsmetodik blir då

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= a\hat{x} + bu + K(y - c\hat{x}) \\ r &= y - c\hat{x}\end{aligned}$$

där  $K$  är vald så att  $a - Kc$  ligger i vänster halvplan, dvs.  $a - Kc < 0$ .

5

## Översikt

---

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

7

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\alpha w - (a + \alpha)y - cbu & \dot{\hat{x}} &= a\hat{x} + bu + K(y - c\hat{x}) \\ r &= w + y & r &= y - c\hat{x}\end{aligned}$$

Välj  $K$  så att  $a - Kc = -\alpha$ , då blir observatörlösningen

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -\alpha\hat{x} + bu + \frac{1}{c}(a + \alpha)y \\ r &= y - c\hat{x}\end{aligned}$$

Byt nu tillståndsvariabel till  $w = -c\hat{x}$  så fås

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\alpha w - (a + \alpha)y - cbu \\ r &= y + w\end{aligned}$$

Detta gäller även generellt för linjära system; alla residualgeneratorer som kan konstrueras via konsistensrelationer kan konstrueras via observatörsmetodik och vice versa.

6

## Observatör för linjärt system

---

För en linjär modell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

kan en observatör tecknas

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Vi vill att  $\hat{x} \rightarrow x$ . Teckna  $e = x - \hat{x}$ , då gäller

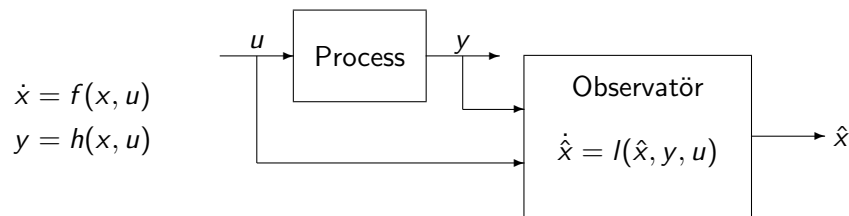
$$\dot{e} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Cx - C\hat{x}) = (A - KC)e$$

Om  $A - KC$  har egenvärden i vänster halvplan så kommer  $e \rightarrow 0$ . Detta är möjligt om modellen är [observerbar](#).

8

## (Tillstånds-) observatörer

En observatör är ett filter som skattar interna tillstånd i en tillståndsbeskrivning med hjälp av observerade variabler.



där vektorfältet  $l(\hat{x}, y, u)$  väljs så att  $\hat{x} \rightarrow x$ .

En enkel observatörsansats är:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{f(\hat{x}, u) + K(y - h(\hat{x}, u))}_{l(\hat{x}, y, u)}$$

9

## Extended Kalman Filter

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= g(x_t, w_t), & \text{cov } w_t &= Q_t \\ y_t &= h(x_t) + e_t, & \text{cov } e_t &= R_t \end{aligned}$$

### Mätuppdatering

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1})) & H_t &= \frac{\partial}{\partial x} h(x) \Big|_{x=\hat{x}_{t|t-1}} \\ K_t &= P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1} \end{aligned}$$

### Tidsuppdatering

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t} &= g(\hat{x}_{t|t}, 0) & F_t &= \frac{\partial}{\partial x} g(x, w) \Big|_{x=\hat{x}_{t|t}, w=0} \\ P_{t+1|t} &= F_t P_{t|t} F_t^T + G_t Q_t G_t^T & G_t &= \frac{\partial}{\partial w} g(x, w) \Big|_{x=\hat{x}_{t|t}, w=0} \end{aligned}$$

11

## Observatörer

Sätt att välja observatörsförstärkningen  $K$  i

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(y - h(\hat{x}, u))$$

görs ("ad-hoc"-mässigt) till exempel genom:

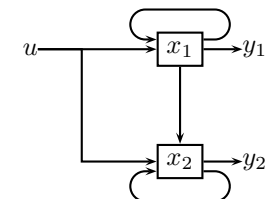
- linjärisering och polplacering eller Kalman-filter design linjärisering runt en arbetspunkt.
- Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter (UKF), partikelfilter, ...
- sliding mode
- high-gain
- gain scheduling - parameterstyrning
- hur många till som helst ...

10

## Observerbarhet - finns informationen i mätningarna?

- Lite slarvigt: Är det möjligt att konstruera en observatör?  $\Leftrightarrow$  syns information om alla tillstånd i observationerna?  $\Leftrightarrow$  går det att få  $\hat{x} \rightarrow x \Leftrightarrow$  är systemet observerbart?
- Eftersom vi vid avkoppling av tex. sensorfel, "tar bort" mättekvationer så kan man råka ut för att systemet blir icke observerbart även om det var så från början.
- Olinjär observerbarhet är teoretiskt lite böjigt, men inte sällan kan man se viktiga saker rätt enkelt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y_1 &= h_1(x_1, u) \\ y_2 &= h_2(x_2, u) \end{aligned}$$



Tillståndet  $x$  är observerbart från  $y_2$  men inte från  $y_1$ .

12

För ett linjärt system,

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

derivera mätsignalen  $n - 1$  gånger

$$Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(t) = \mathcal{O}x(t)$$

Observerbarhet är då lika med om vi kan lösa ekvationssystemet

$$Y = \mathcal{O}x(t)$$

vilket gick om matrisen  $\mathcal{O}$  hade full kolumnrang.

13

## Ett tillräckligt villkor för olinjär observerbarhet

Gör nu på samma sätt som för linjära system

$$Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(q)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^q h(x) \end{pmatrix} = F(x)$$

Enligt inversa funktionssatsen så är ett tillräckligt villkor för att  $x$  unikt ska bestämmas, i en omgivning av  $x = x^0$  och  $y^0 = F(x^0)$ , att

$$\exists q. \text{ rang } \frac{\partial}{\partial x} F(x) \Big|_{x=x^0} = n$$

Detta är ett enkelt algebraiskt villkor som kan testas (för ett givet  $q$ ).  
Sammanfattningsvis:

### Theorem (Observability rank condition)

Om ett system uppfyller rangvillkoret ovan i  $x = x^0$  är systemet lokalt svagt observerbart i  $x^0$ .

15

För ett olinjärt system

$$\dot{x} = f(x)$$

$$y = h(x)$$

så gäller att

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = L_f h(x)$$

där  $L_f h(x)$  kallas Lie-derivatan av  $h(x)$  längs  $f(x)$ . Med en utökad notation för repeterade deriveringar

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (L_f^{k-1} h(x)) f(x), \quad L_f^0 h(x) = h(x)$$

så har man ett enkelt skrivsätt för

$$y^{(k)} = L_f^k h(x)$$

14

## Översikt

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

16

## Observatörer för diagnos

Systemet som ska övervakas har inga signaler som ska avkopplas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_f f \\ y &= Cx\end{aligned}$$

En linjär observatör ges naturligt av:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u u + K(y - C\hat{x}) \\ r &= y - C\hat{x}\end{aligned}$$

Om  $A - KC$  är stabil så kommer  $r \rightarrow 0$  då  $f = 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (A - KC)e + B_f f \\ r &= Ce\end{aligned}$$

Med överföringsfunktion från fel till residual

$$G_{rf}(s) = C(sI - A + KC)^{-1}B_f$$

17

## En generell metodik

De flesta olinjära observatörsmetoder bygger på:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, f, d) \\ y &= h(x, u, f, d)\end{aligned}$$

och hitta en transformation  $z = \Phi_1(x)$  och  $\tilde{y} = \Phi_2(y)$  så att systemet transformeras till

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f_1(z_1, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u, f) \\ \dot{z}_2 &= f_2(z_1, z_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u, f, d) \\ \tilde{y}_1 &= h_1(z_1, u, f) \\ \tilde{y}_2 &= h_2(z, u, f)\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\dot{z}_1 &= f_1(z_1, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u, f) \\ \tilde{y}_1 &= h_1(z_1, u, f)\end{aligned}$$

dvs. man har extraherat ut en del av systemet som inte påverkas av signalen  $d$ . Återkoppla sedan  $\tilde{y}_1$  för att generera residual. Metodik för att hitta  $\Phi_1$  och  $\Phi_2$  oftast komplicerad.

19

## Med avkoppling

Om man har signaler som ska avkopplas är det inte lika enkelt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d + B_f f \\ y &= Cx + D_d d + D_f f\end{aligned}$$

En liknande linjär observatör ges naturligt av:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u u + K(y - C\hat{x}) \\ r &= W(y - C\hat{x})\end{aligned}$$

Två krav:

- $A - KC$  måste vara stabil (enkelt om systemet är observerbart)
- Överföringsfunktionen nedan ska vara 0 (inte enkelt)

$$G_{rd}(s) = \dots = W(C(sI - (A - KC))^{-1}(B_d d - KD_d d) + D_d d)$$

18

## Observatörer, forts.

- Observatörer är ett naturligt sätt att generera residualer när vi inte behöver göra avkoppling.
- Svårt när vi ska avkoppla. Avkoppling löst linjärt, men olinjärt är det svårare. En del resultat finns.
- Inga derivator av kända variabler dyker upp, vi får direkt en tillståndsrepresentation av residualgeneratorn.

20

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

21

## Fel modellerade som konstanta parametrar

---

Antag modellen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta x + u \\ y &= x\end{aligned}$$

där  $\beta$  är en **okänd** och **konstant** parameter.

Vi vill konstruera en teststorhet med en observatör som avkopplar förändringar i  $\beta$ .

23

- 1 Stabilitet hos residualen (hur ser man till att  $\hat{x} \rightarrow x$ ?)
- 2 avkoppling av signaler

Det första problemet finns mycket forskning och erfarenhet om, teoretiskt ofta svårt att visa konvergens, men i praktiken ofta möjligt med väl fungerande lösningar.

Den andra punkten är bökigare. Här tas upp två enkla (men vanliga) fall där avkoppling är rättfram.

- fel modellerade som konstanta fel
- fel i sensorer

22

## Fel modellerade som konstanta parametrar

---

Introducera en ny tillståndsvektor:  $z = \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix}$ . Dynamiken för det nya tillståndet är  $\dot{\beta} = 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{pmatrix} -z_2 z_1 + u \\ 0 \end{pmatrix} \\ y &= z_1\end{aligned}$$

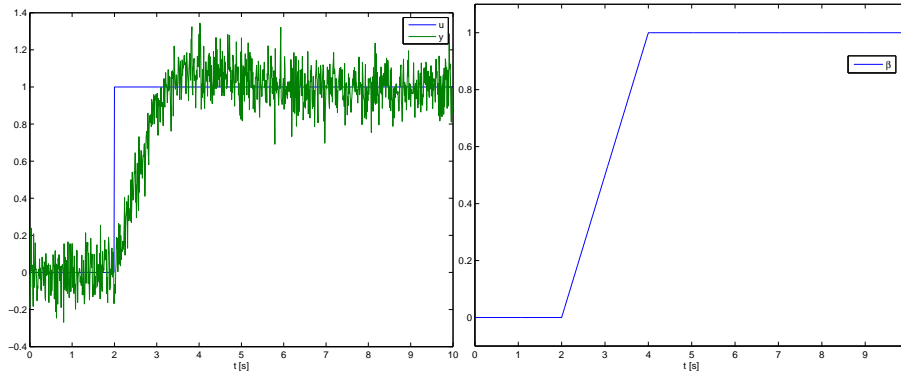
där  $z_1 = x$  och  $z_2 = \beta$ . Antag att ett  $K$  sådant att

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= \begin{pmatrix} -\hat{z}_2 \hat{z}_1 + u \\ 0 \end{pmatrix} + K(t)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \hat{z}_1 \\ r &= y - \hat{y}\end{aligned}$$

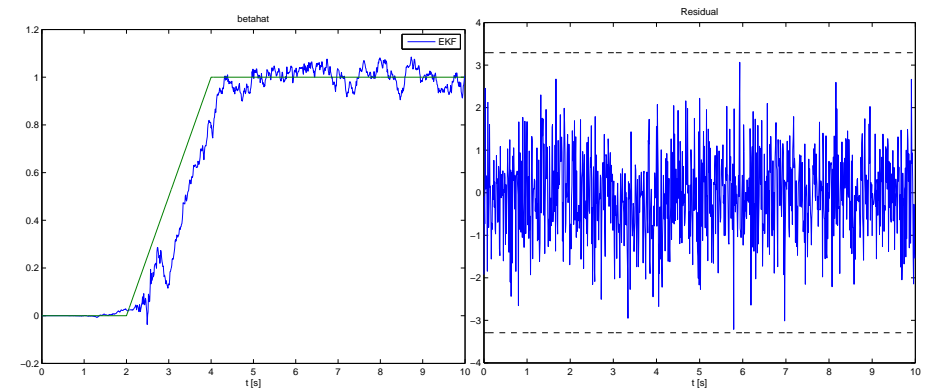
är stabilt.

Då kommer residualen  $r$  gå mot 0 oberoende av värdet på  $\beta$ .

24



25



26

Exempel:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y_1 &= h_1(x, u) + f_1 \\ y_2 &= (1 - f_2)h_2(x, u) \\ y_3 &= h_3(x, u, f_3) \end{aligned}$$

Notera att  $f_i$  bara ingår i sensor ekvationer.

För att avkoppla fel i sensor  $i$ , generera residualen genom att använda en observatör för att skatta  $\hat{y}_j$  utan att använda sensor  $i$ .

Beräkna residualen som  $r = y_j - \hat{y}_j$  där  $i \neq j$ .

27

**Modell:**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_1(x, u) \\ h_2(x, u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Sökt:** Residual känslig för fel  $f_{s1}$  och okänslig för  $f_{s2}$ .

**Strategi:**

- Residualen skapas som  $r_1 = y_1 - \hat{y}_1$  där
- $\hat{y}_1$  skattas utan att använda sensor 2 ( $y_2$ ).

**Lösning:** Skattningen  $\hat{y}_1$  kan göras via en olinjär observatör:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + K_1(y_1 - h_1(\hat{x}, u)) \\ r_1 &= y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - h_1(\hat{x}, u) \end{aligned}$$

28

- + Observatörsproblemet mycket välstuderat och välanvänt inom industrin.
- (-) Även om det är välstuderat så finns ofta inga garantier för stabilitet. Trots allt ett ganska svårt problem.
- + Inget problem med realisering av residualgeneratoren, den fås direkt på tillståndsform.
- Avkoppling är svårt (blev bökigt även i ett linjärt fall).
- + Det fanns två vanligt förekommande fall där avkoppling var rättfram.

29

## Konsistensrelationer

---

En olinjär konsistensrelation en relation mellan observerbara signaler (och dess derivator) som är uppfylld i det felfria fallet.

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow g(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots) = 0$$

För att kunna använda  $g$  för att detektera fel så måste ett övervakat fel göra så att relationen bryts.

För linjära system var det "enkelt" att hitta alla konsistensrelationer.

Det olinjära problemet är inte lika enkelt och inga generella resultat finns som i det linjära fallet. Dock kan man komma en bra bit med sunt förnuft, handräkning och datorhjälpmedel.

Konsistensrelationer  $\sim$  ARR (Analytical Redundancy Relation)  $\sim$  parity relation  $\sim \dots$

31

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

30

## Olinjära konsistensrelationer

---

Att härleda konsistensrelationer kan ses som problemet att givet modellekvationerna, eliminera okända variabler.

Linjärt exempel:

$$y_1 = 6x + u$$

$$y_2 = 3x$$

vilket ger att

$$y_1 - 2y_2 = 6x + u - 2 \cdot 3x = u$$

och alltså är

$$y_1 - 2y_2 - u = 0$$

en konsistensrelation.

Relationen hittades genom att med en "smart" transformation eliminera den okända variabeln  $x$ .

32



Samma angreppssätt kan användas i det olinjära dynamiska fallet.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1x_2 + du \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -dx_1 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2\end{aligned}$$

där  $d$  modellerar en signal vi önskar avkoppla (exempelvis ett fel).

Först, derivera båda mät ekvationerna och eliminera tillståndsvariablerna  $x_i$ :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = -x_1x_2 + du = -y_1y_2 + du \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{y}_2 &= \dot{x}_3 = -dx_1 = -dy_1\end{aligned}$$

### Konsistensrelation, beräkning av residual

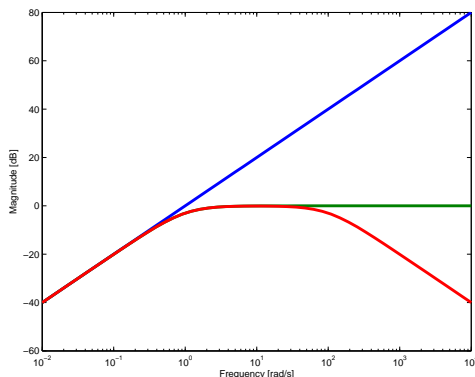
Om alla derivator av  $y$  och  $u$  vore kända:

$$r = y_1\dot{y}_1 + y_1^2y_2 + u\ddot{y}_2$$

Då de (normalt) inte är kända så tvingas vi approximera dem.

$$\dot{y}(t) \approx \frac{P}{1 + p/\omega_c} y(t)$$

Svårt för höga derivator i brusiga miljöer.



$$\begin{aligned}G_1(s) &= s \\ G_2(s) &= \frac{s}{1 + s/\omega_c} \\ G_3(s) &= \frac{s}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_h)}\end{aligned}$$

Vi har alltså bland annat:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 + y_1y_2 - du &= 0 \\ \ddot{y}_2 + dy_1 &= 0\end{aligned}$$

Eliminera  $d$  är nu enkelt genom att multiplicera ekvation 1 med  $y_1$ , ekvation 2 med  $u$  och addera dem. Detta ger konsistensrelationen:

$$y_1(\dot{y}_1 + y_1y_2 - du) + u(\ddot{y}_2 + dy_1) = y_1\dot{y}_1 + y_1^2y_2 + u\ddot{y}_2 = 0$$

där signalen  $d$  har försvunnit.

Alltså, relationen  $y_1\dot{y}_1 + y_1^2y_2 + u\ddot{y}_2 = 0$  håller oavsett värdet på signalen  $d$ .

### Konsistensrelation, beräkning av residual

En mer robust metod bygger på tex. spline-interpolation,

- Anpassa en analytisk funktion till mätdata, exempelvis genom

$$\min_{\theta} P \sum_{i=1}^N (y_i - f(t_i; \theta))^2 + (1 - P) \int_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} \ddot{f}(t; \theta)^2 dt$$

där  $\theta$  är parametrarna i spline-funktionerna,  $y_i$  den uppmätta signalen, och  $P > 0$  en designrätt som viktat hur slät spline-funktionen ska vara.

- Beräkna derivator genom att analytiskt derivera spline-funktionen

## Hur gjorde vi i det linjära fallet?

Vi lade till (LP-)dynamik och skrev sedan residualgeneratoren på tillståndsform. Tex för konsistensrelationen  $y_1 + y_2 + \dot{y}_2 - u = 0$

$$\dot{r} + \beta r = y_1 + y_2 + \dot{y}_2 - u \Rightarrow r = \frac{1}{p + \beta} \begin{bmatrix} 1 & p + 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u \end{pmatrix}$$

vilket kan skrivas som tillståndsformen

$$\dot{w} = -\beta w + y_1 + (1 - \beta)y_2$$

$$r = w + y_2$$

Tyvärr fungerar detta endast i undantagsfall för olinjära system. Exempelvis kan man visa att

$$r + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 \ddot{r} = \dot{y}_1^2 + y_1 \dot{y}_1 y_2 + u \ddot{y}_2$$

ej kan skrivas på tillståndsform.

37

## Härledning: En arbetsgång

- 1 Derivera modellekvationerna tillräckligt många gånger (endast för dynamiska modeller)
- 2 Gör kluriga förenklingar så att okända variabler och icke-övervakade fel elimineras, dvs. hitta

$$h(z, f) = 0$$

- 3 En konsistensrelation är då (om  $f = 0$  är det felfria fallet):

$$h(z, 0) = 0$$

- 4 Lös realisationsproblemet.

Proceduren innehåller 3 öppna frågor.

- 1 Antal gånger vi måste derivera
- 2 Hur ska förenklingarna göras
- 3 Realiseringsproblemet

39

## Perfekt realisering av olinjära konsistensrelationer

Egentligen är enda möjligheten att skriva om det till ett linjärt problem

$$0 = \dot{y}_1 y_2 + y_1 \dot{y}_2 + u = \frac{d}{dt}(y_1 y_2) + u$$

ovanstående går väldigt sällan. Tex är det inte möjligt för

$$0 = \dot{y}_1 y_2 + 2y_1 \dot{y}_2 + u$$

Men multiplicerar man konsistensrelationen med  $y_2$  så

$$0 = y_2(\dot{y}_1 y_2 + 2y_1 \dot{y}_2 + u) = \dot{y}_1 y_2^2 + 2y_1 y_2 \dot{y}_2 + u y_2 = \frac{d}{dt}(y_1 y_2^2) + y_2 u$$

är vi tillbaka i ett linjärt fall.

Ej heller detta går i alla fall och kräver rätt avancerad teori. Principen är dock lätt och kan nyttjas ibland.

38

## Tre öppna frågor

- Antal gånger vi måste derivera  
Linjärt räcker det med modellens ordning. Olinjärt så är detta en bra gissning.
- Hur ska förenklingarna göras  
Generellt svårt men handräkning och datorstöd kan ta en långt. Gäller speciellt vissa klasser av system.
- Använda relationen till att beräkna en residual  
Tex. skatta derivatorna och sätt in.

Finns differential-algebraisk teori och metodik som löser 1 och 2 i samma steg (exempelvis differentiella Gröbner-baser).

40

## Klasser av olinjära system

Det finns klasser av olinjära system där det finns teori och datorhjälpmedel så att härledning av konsistensrelationer är (nästan) lika enkelt i det olinjära fallet som i det linjära.

Exempel på sådana klasser av system är bilinjära och polynomiska system.

Exempel på bilinjärt system:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} x_i H_{ij} x_j$$

Polynomiska system är ännu lite mer generella:

$$g_i(x, z) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

där  $g_i$  är polynom i  $x$ ,  $z$  samt deras derivator.

41

## Datorhjälpmedel

Betrakta modellen och en konsistensrelation:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2 + u \\ y &= x^3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}^3 + 27\dot{y}y^2u + 27y^4 - 27y^2u^3 = 0$$

I Mathematica kan denna konsistensrelation härledas med kommandona:

```
In[1] := x'[t] := -x[t]^2+u[t];
f = y[t]-x[t]^3;
GroebnerBasis[{f,D[f,t]},{}, {x[t]}]
```

```
Out[2]= {27 u[t]^3 y[t]^2 - 27 y[t]^4 -
27 u[t]y[t]^2y'[t]-y'[t]^3}
```

**Notera:** Det är **inte** meningen att ni ska lära er varken Mathematica eller teorin bakom Gröbner-baser. Slutsatsen här är att om ni stöter på polynomiska problem ska veta om att då är datoralgebraiska verktyg speciellt hjälpsamma.

43

## Polynomiska system

Med polynom menas till exempel:

$$g(y, u) = y^3 \dot{u} - yu, \quad g(y, u) = \dot{y}^3 + 27\dot{y}y^2u + 27y^4 - 27y^2u^3$$

eller en tillståndsbeskrivning

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

där  $f$  och  $h$  är polynomiska ekvationer.

För dessa typer av modellbeskrivningar finns teori (Gröbner-baser) och datorverktyg (Maple, Mathematica, ...) som kan eliminera obekanta (härleda konsistensrelationer).

Generell kommentar: Datoralgebraiska system är särskilt väl lämpade att hantera polynomiska uttryck.

42

## Polynomiska system, fler än man kanske tror

Många system som ej är skrivna på polynomisk form kan skrivas om.

Exempel:

$$\dot{y} + e^{-ay} - u = 0$$

kan skrivas om på polynomisk tillståndsform som:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -z + u \\ \dot{z} &= -az\dot{y} = -az(u - z) \end{aligned}$$

Detta görs via omskrivningen  $z = e^{-ay}$  som är **lösningen till den polynomiska differentialekvationen**  $\dot{z} + az\dot{y} = 0$ .

Alla elementära funktioner (trigonometriska, exponentiella, logaritmer) kan skrivas om på det viset.

$$y = \sin u \quad \Rightarrow \quad \dot{y}^2 - \dot{u}^2(1 - y^2) = 0$$

44

- + Avkoppling av störningar görs på samma sätt som för linjära ekvationer
- + Datorverktyg finns som kan hjälpa
- + Oftast inga problem med instabila residualgeneratorer
- Svårt att använda konsistensrelationen till att beräkna residualer. Man tvingas uppskatta derivator vilket kan vara svårt.
- Även om det såg bra ut i det lilla Mathematica-exemplet så är det en **mycket** beräkningskrävande operation. För stora exempel så tar det **väldigt** lång tid, kräver **väldigt** mycket minne och genererar **gigantiska** uttryck.

45

## Konsistensrelationer vs observatörer

---

Sammanfattning styrkor och svagheter,

### Konsistensrelationer

- + Avkoppling "enkelt"
- + Datorverktyg finns
- + Stabilitet hos residualgeneratorer
- Svårt att beräkna residualer, derivatuppskattning
- **Mycket** beräkningskrävande

### Observatörer

- + Observatörsproblemet mycket välstuderat
- (-) Ofta inga garantier för stabilitet men ofta överkomligt problem
- + Inget problem med realisering av residualgeneratoren, den fås direkt på tillståndsform.
- Avkoppling är svårt
- + Det fanns två vanligt förekommande fall där avkoppling var rättfram.

47

## Översikt

---

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

46

## Översikt

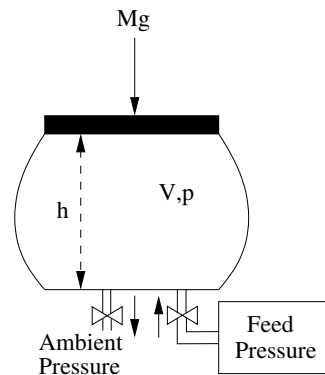
---

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

48

## Exempelsystem

Principskiss och modell av en luftbälg för luftfjädring av lastbil.



$$M\ddot{h} = -Mg + F_b(p, h) - \mu\dot{h} + f_1 \quad (1)$$

$$pV(p, h) = mRT \quad (2)$$

$$\dot{m} = u_1g_1(p) + u_2g_2(p) + f_2 \quad (3)$$

$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$

$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

$f_1$  - förändring av massan  $M$      $f_2$  - fel på aktueringen  
 $f_3$  - fel på tryckgivaren         $f_4$  - fel på avståndsgivaren

49

## Exempel 1: konsistensrelation eller observatör?

$$pV(p, h) = mRT \quad (2)$$

$$\dot{m} = u_1g_1(p) + u_2g_2(p) + f_2 \quad (3)$$

$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$

$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

### Konsistensrelation

- Ser eliminering svår ut? Nej, efter substitution av givare återstår bara två ekvationer.
- Hur ser dynamiken ut? Derivatans ingår linjärt i konsistensrelationen.
- Konsistensrelationsmetoden ser framkomlig ut.

### Observatör

- Modellen är en DAE och måste därför skrivas om på tillståndsform.
- Eftersom tillståndet är  $m$  går det att skatta  $m$  utan att använda (3)? Ja, lös ut  $m$  ur (2) och sätt in mätsignalerna.
- Observatör ser framkomligt ut.

51

## Exempel 1: Isolera från fel $f_1$

För att isolera från fel  $f_1$ , använd ej ekvation (1).

$$M\ddot{h} = -Mg + F_b(p, h) - \mu\dot{h} + f_1 \quad (1)$$

$$pV(p, h) = mRT \quad (2)$$

$$\dot{m} = u_1g_1(p) + u_2g_2(p) + f_2 \quad (3)$$

$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$

$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

Om en residual kan skapas med hjälp av ekvationerna 2-5 så har vi isolerat  $f_2$ ,  $f_3$ , och  $f_4$  från fel  $f_1$ .

50

## Exempel 1: konsistensrelation

Efter substitution av mätsignaler har vi endast två ekvationer kvar

$$\dot{m} = u_1g_1(y_1) + u_2g_2(y_1)$$

$$y_1V(y_1, y_2) = mRT$$

Derivera ekvation 2 och sätt in ger

$$\frac{d}{dt}(y_1V(y_1, y_2)) - RT(u_1g_1(y_1) + u_2g_2(y_1)) = 0$$

Derivatans ingår linjärt så

$$\dot{r} + \alpha r = \frac{d}{dt}(y_1V(y_1, y_2)) - RT(u_1g_1(y_1) + u_2g_2(y_1))$$

Med tillståndet  $w = r - y_1V(y_1, y_2)$  så får vi realiseringen

$$\dot{w} = -\alpha(w + y_1V(y_1, y_2)) - RT(u_1g_1(y_1) + u_2g_2(y_1))$$

$$r = w + y_1V(y_1, y_2)$$

52

## Exempel 1: observatör

Efter substitution av mätsignaler har vi endast två ekvationer kvar

$$\begin{aligned}\dot{m} &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) \\ y_1 V(y_1, y_2) &= mRT\end{aligned}$$

Använd andra ekvationen som mätekvation och återkoppling för att skatta tillståndet  $m$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{m}} &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) + K(y_1 V(y_1, y_2) - \hat{m}RT) \\ r &= y_1 V(y_1, y_2) - \hat{m}RT\end{aligned}$$

53

## Exempel 2: konsistensrelation

Substituera in mätekvationen  $y_1 = p$  så får vi

$$\begin{aligned}M\ddot{h} &= -Mg + F_b(y_1, h) - \mu\dot{h} \\ y_1 V(y_1, h) &= mRT \\ \dot{m} &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1)\end{aligned}$$

Här vill vi eliminera de obekanta  $h$  och  $m$ . Inte lika enkelt som förra gången!

Det visar sig att vi måste derivera ekvation (2) tre gånger vilket leder till att  $y^{(3)}$  kommer att ingå i konsistensrelationen.

Konsistensrelationsmetoden verkar svår, prova observatörsdesign!

55

## Exempel 2: Isolera från fel $f_4$

För att isolera från fel  $f_4$ , använd ej ekvation (5).

$$\begin{aligned}M\ddot{h} &= -Mg + F_b(p, h) - \mu\dot{h} + f_1 & (1) \\ pV(p, h) &= mRT & (2) \\ \dot{m} &= u_1 g_1(p) + u_2 g_2(p) + f_2 & (3) \\ y_1 &= p + f_3 & (4) \\ y_2 &= h + f_4 & (5)\end{aligned}$$

Om en residual kan skapas med hjälp av ekvationerna 1-4 så har vi isolerat  $f_1$ ,  $f_2$ , och  $f_3$  från fel  $f_4$ .

54

## Exempel 2: observatör

Skriv systemet på tillståndsform  $x = (h, \dot{h}, m)$

$$\begin{aligned}M\ddot{h} &= -Mg + F_b(y_1, h) - \mu\dot{h} & \dot{x}_1 &= x_2 \\ y_1 V(y_1, h) &= mRT & \Rightarrow \dot{x}_2 &= -Mg + F_b(y_1, x_1) - \mu x_2 \\ \dot{m} &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) & \dot{x}_3 &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) \\ & & 0 &= y_1 V(y_1, x_1) - x_3 RT\end{aligned}$$

Igen, med sista ekvationen som mätekvation så får vi en residualgenerator på formen

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 & + K_1(y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -Mg + F_b(y_1, \hat{x}_1) - \mu\hat{x}_2 & + K_2(y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) & + K_3(y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT) \\ r &= y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT\end{aligned}$$

där  $K_i$  trimmas så att  $\hat{x} \rightarrow x$ , dvs. vi har stabilitet.

56

- + Avkoppling "enkelt", iallafall systematiskt
- + Stabilitet hos residualgeneratorer ingen fråga
- Derivatauppskattningar
- /+ Behov av derivataskattningar kan minska, men kräver speciella omständigheter och svårt att nå ända fram
- Avkoppling är svårt men ibland möjligt
- + Observatörsdesign; standardmässig där etablerad metodik kan användas
- + Inget problem med realisering av residualgeneratör, den fås direkt på tillståndsform.

*TSFS06 Diagnos och övervakning*  
*Föreläsning 7 - Olinjär residualgenerering*

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik  
Linköpings universitet  
erik.frisk@liu.se

2017-04-26