TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 5 - Konstruktion av teststorheter

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
erik.frisk@liu.se

2020-04-15

Ämnen för dagen

- En teststorhet är ett modellvalideringsmått för modell under nollhypotesen
- Vad är modell under nollhypotesen
- 4 allmänna principer för att konstruera teststorheter
  1. prediktionsfel
  2. residualer, konsistensrelationer och observatörer
  3. parameterskattning
  4. likelihood-funktionen
- Ej ortogonala och inga principer för när och hur.
- Idag kommer vi mest studera fallet då fel modelleras som avvikelser i konstanta parametrar (ej generella felsignaler).
- Verktygslåda/tänkesätt

Nästa gång: Tröskelsättning och försöka svara på frågan, hur bra är ett specifikt test?

Översikt

Beteendemoder och felmodeller

Formalisering: Modellen $\mathcal{M}(\theta)$:

$$y(t) = \theta_1 u_1(t) + \theta_2 u_2(t) + \theta_3 u_3(t)$$

Beteendet beskrivs genom att för varje mod $F_p \in \{NF, F_1, F_2, F_3\}$ definiera vilka värden som θ kan anta.

$$\begin{aligned}
F_p &= NF \rightarrow \theta \in \Theta_{NF} & \Theta_{NF} &= \{\theta | \theta = [1\ 1\ 1]\} \\
F_p &= F_1 \rightarrow \theta \in \Theta_{F_1} & \Theta_{F_1} &= \{\theta | \theta_1 \neq 1, \theta_2 = \theta_3 = 1\} \\
F_p &= F_2 \rightarrow \theta \in \Theta_{F_2} & \Theta_{F_2} &= \{\theta | \theta_2 \neq 1, \theta_1 = \theta_3 = 1\} \\
F_p &= F_3 \rightarrow \theta \in \Theta_{F_3} & \Theta_{F_3} &= \{\theta | \theta_3 \neq 1, \theta_1 = \theta_2 = 1\}
\end{aligned}$$

Θ_γ är feltillståndsrummet för mod F_γ (obs inget linjärt rum).

$\theta \in \Theta = \cup_{\gamma \in \Omega} \Theta_\gamma$

Översikt

- Beteendemoder och beteendemodeller
- Teststorheten och modellvalidering
- Design av teststorheter
  - Prediktionsfel
  - Parameterskattningar
  - Likelihood-funktionen
- Avslutning

Teststorheten är ett modellvalideringsmått

Betrakta

	NF	F_1	F_2	F_3
T	0	0	X	X

Hypoteserna kan tecknas:

$$H^0 : F_p \in \{NF, F_1\}$$
$$H^1 : F_p \in \{F_2, F_3\}$$

Uttryckt med feltillstånd blir det:

$$H^0 : \text{Modellen } \mathcal{M}(\theta), \text{ där } \theta \in \Theta_{NF} \cup \Theta_{F1}, \text{ är sann}$$
$$H^1 : \text{Modellen } \mathcal{M}(\theta), \text{ där } \theta \in \Theta_{NF} \cup \Theta_{F1}, \text{ inte är sann.}$$

Detta kan också skrivas som:

$$H^0 : \theta \in \Theta_{NF} \cup \Theta_{F_1}$$
$$H^1 : \theta \notin \Theta_{NF} \cup \Theta_{F_1} \quad \text{dvs. } \theta \in \Theta_{F_2} \cup \Theta_{F_3}$$

Teststorheten är ett modellvalideringsmått

Test T svarar alltså mot hypotestestet:

$$H^0 : \text{Modellen } \mathcal{M}(\theta), \text{ där } \theta \in \overbrace{\Theta_{NF} \cup \Theta_{F1}}^{=:\Theta_0}, \text{ är sann}$$
$$H^1 : \text{Modellen } \mathcal{M}(\theta), \text{ där } \theta \in \Theta_{NF} \cup \Theta_{F1}, \text{ inte är sann.}$$

Teststorheten ska alltså indikera om nollhypotesen H^0 är sann eller inte, dvs. den skall vara ett modellvalideringsmått för modellen:

$$\mathcal{M}(\theta), \text{ där } \theta \in \Theta_0$$

Modellvalideringsmått, forts.

Titta lite noggrannare på testet.

$$H^0 : \theta \in \Theta_0 = \Theta_{NF} \cup \Theta_{F_1}$$
$$H^1 : \theta \notin \Theta_0$$

Feltillståndsvektorn under H^0:

$$\Theta_0 = \{\theta | \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta_2 = \theta_3 = 1\}$$

Modellen under H^0:

$$y(t) = \theta_1 u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

dvs. vi ska hitta en teststorhet som är noll (liten) då modellen under H^0 är konsistent med observerade data, stora annars.

Teststorheten ska besvara om det finns något $\theta_1 \in \mathbb{R}$ så att modellen är konsistent med observationerna $\{y(t), u(t)\}_{t=1}^{N}$.

Exempel på sådan teststorhet:

$$T = \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))^2$$

Hur beräknar vi T?

En direkt, men en smula klumpig, ansats för att beräkna T är:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))^2 =$$
$$= -2 \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) u_1(t)$$

Vilket ger att det minimerande θ måste uppfylla ekvationen

$$\sum_{t=1}^{N} (y(t) - u_2(t) - u_3(t)) u_1(t) = \theta_1 \sum_{t=1}^{N} u_1^2(t)$$

Hur beräknar vi T, forts.

Är $u_1(t) \equiv 0$ finns naturligt inget unikt minimerande θ_1 utan alla ger samma värde på T.
Vi kan därför beräkna teststorheten enligt

$$T = \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))^2 =$$
$$= \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \hat{\theta}_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))^2$$

med

$$\hat{\theta}_1 = \begin{cases} \frac{\sum_{t=1}^{N} (y(t) - u_2(t) - u_3(t)) u_1(t)}{\sum_{t=1}^{N} u_1^2(t)} & \text{om } u_1(t) \not\equiv 0 \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$$

En smula klumpig härledning och implementation av teststorheten.
Återkommer till detta senare då vi pratar om linjär regression.

Modellvalideringsmått, forts.

Vad blir teststorheten i fallet H_0? Antag ett feltillstånd $\theta^0 \in \Theta_0$, dvs observationerna genereras enligt:

$$y(t) = \theta_1^0 u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

Då blir teststorheten:

$$T = \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))^2 =$$
$$= \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^{N} (\theta_1^0 - \theta_1)^2 u_1(t)^2 = \Big/ u_1(t) \equiv 0 \vee \hat{\theta}_1 = \theta_1^0 \Big/ = 0$$

Modellen överensstämmer och måttet blir 0 då H_0 sann.

Normalt modelleras också brus i mätdatat, vilket leder till att T får en fördelning under H_0.

Modellvalideringsmått, forts.

Vad blir teststorheten i fallet att H_1 är sann? Betrakta ett fel F_2 med feltillstånd $\theta^1 \in \Theta_{F_2}$, dvs observationerna genereras enligt:

$$y(t) = u_1(t) + \theta_2^1 u_2(t) + u_3(t)$$

Då blir teststorheten:

$$T = \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))^2$$
$$= \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^{N} ((1 - \theta_1) u_1(t) - (1 - \theta_2^1) u_2(t))^2$$

Låt

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_1(2) & \cdots & u_1(N) \end{bmatrix}^T$$
$$U_2 = \begin{bmatrix} u_2(1) & u_2(2) & \cdots & u_2(N) \end{bmatrix}^T$$

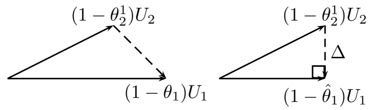
Då blir

$$T = \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} |(1 - \theta_1) U_1 - (1 - \theta_2^1) U_2|^2$$

Modellvalideringsmått, forts.

$$T = \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} |(1-\theta_1)U_1 - (1-\theta_2^1)U_2|^2$$

Geometrisk tolkning:



$$T = \Delta^2$$

Fel F_2 detekteras om U_2 ej är parallell med U_1.

Modell under nollhypotesen

Vad betyder egentligen $M(\theta), \theta \in \Theta_0$?

Antag en modell:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2, f_1, u) \\
\dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2) \\
\dot{f}_1 &= 0 \\
y_1 &= h_1(x_1) + f_2 \\
y_2 &= h_2(x_2) + f_3
\end{aligned}$$

med de förväntade felmoderna F_1, F_2, och F_3.

Antag vi vill skapa residualer enligt

	F_1	F_2	F_3
T_1	0	X	X
T_2	X	0	X
T_3	X	X	0

Modell under nollhypotesen, forts.

Test T_1 svarar mot hypoteserna

$$H^0 : F_p \in \{NF, F_1\}, \quad H^1 : F_p \in \{F_2, F_3\}$$

Under H^0 gäller att f_1 är fri, $f_2 = f_3 = 0$. Modellen under noll-hypotesen, dvs modellen teststorheten T_1 skall validera blir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2, f_1, u) \\
\dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2) \\
\dot{f}_1 &= 0 \\
y_1 &= h_1(x_1) \\
y_2 &= h_2(x_2)
\end{aligned}$$

Här har vi kvar den fria signalen f_1 eftersom vi har en modell för hur den beter sig. Vi får inte "slänga bort" kunskapen att f_1 faktiskt är en konstant, okänd men konstant. Denna situation har vi inte för signalerna f_2 och f_3.

Modell under nollhypotesen, forts.

Test T_3 då? Det testet svarar mot

$$H^0 : F_p \in \{NF, F_3\}, \quad H^1 : F_p \in \{F_1, F_2\}$$

Under H^0 gäller att f_3 är fri, $f_1 = f_2 = 0$. Modellen under noll-hypotesen, dvs modellen teststorheten T_3 skall validera är

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2, 0, u) \\
\dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2) \\
y_1 &= h_1(x_1)
\end{aligned}$$

Modellen för test T_2 blir analog eftersom både f_2 och f_3 kommer in additivt på varsin mätsignal.

Modell under nollhypotesen, linjärt fall

Antag den linjära modellen med tre fel

$$H(p)x + L(p)z + F_1(p)f_1 + F_2(p)f_2 + F_3(p)f_3 = 0$$

och vi vill skapa residualr_1 med känslighet enligt

	F_1	F_2	F_3
r_1	0	X	X
r_2	X	0	X
r_3	X	X	0

dvs. vi vill skapa en residualgenerator, enligt tidigare föreläsningar, för att detektera observationer z utanför mängden

$$\mathcal{O}(F_1) = \{z | \exists x, f_1; H(p)x + L(p)z + F_1(p)f_1 = 0\}$$

Skriv om modellen med $x := (x, f_1)$ och $f := (f_2, f_3)$ enligt

$$\begin{pmatrix} H(p) & F_1(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f_1 \end{pmatrix} + L(p)z + \begin{pmatrix} F_2(p) & F_3(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

och använd metodiken.

Sammanfattning, en arbetsgång, ett tänk

Arbetsgång

1. Teckna tänkt beslutsstruktur
2. För varje test i systemet, ta fram modellen under nollhypotesen (det underlättar om man faktiskt skriver ned den)
3. Konstruera ett modellvalideringsmått för modellen, dvs. generera en signal som är 0 (eller liten) om modellen faktiskt kan vara sann.

Översikt

- Beteendemoder och beteendemodeller
- Teststorheten och modellvalidering
- Design av teststorheter
  - Prediktionsfel
  - Parameterskattningar
  - Likelihood-funktionen
- Avslutning

Allmän princip för design av teststorheter

Konstruera en teststorhet som är liten om vi kan anpassa modellen

$$\mathcal{M}(\theta), \qquad \theta \in \Theta_0$$

till observationerna (uppmätta data). Notera att modellen under nollhypotesen kan vara signifikant enklare än den generella modellen med alla felmoder inkluderade.
Antag:

$$V(\theta, [u, y])$$

vara ett generellt modellvalideringsmått för modellen $\mathcal{M}(\theta)$ med avseende på data $[u, y]$.
Då är

$$T = \min_{\theta \in \Theta_0} V(\theta, [u, y])$$

liten under nollhypotesen och (förhoppningsvis) stor annars, dvs ett mått på konsistens mellan modell och uppmätta data.

Principer för konstruktion av teststorheter

Design av teststorheter baserat på:

- residualer
  konsistensrelationer, observatörer
  (ej nu, vi har gjort det för linjära modeller och vi återkommer till det i senare föreläsning)

1. prediktionsfel
2. parameterskattningar
3. likelihood-funktionen

Finns fler och detta är ingen ortogonal(disjunkt) klassificering!
Dessa principer kan kombineras för olika felmodeller.

Lite notation

$$V(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\min_x V(x) = 0$$

$$\arg\min_x V(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\arg_{x_1}\min_x V(x) = 2$$

Översikt

- Beteendemoder och beteendemodeller
- Teststorheten och modellvalidering
- Design av teststorheter
  - Prediktionsfel
  - Parameterskattningar
  - Likelihood-funktionen
- Avslutning

Teststorhet baserad på prediktionsfelen

Exempel på modellvalideringsmått för modell $M(\theta)$ för ett fixt θ:

$$V(\theta, z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \|y(t) - \hat{y}(t|\theta)\|$$

Om Θ^0 består av ett enda värde:

$$T(z) = V(\theta_0, z)$$

$\Rightarrow$ ett modellvalideringsmått för modellen $\mathcal{M}(\theta_0)$
Om Θ^0 är en mängd av flera värden:

$$T(z) = \min_{\theta \in \Theta^0} V(\theta, z)$$

$\Rightarrow$ ett modellvalideringsmått för modellen $\mathcal{M}(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$
Notera: avkoppling

Exempel: Förstärkning och bias

$$y(t) = gu(t) + b + v(t) \qquad v(t) \in N(0, \sigma^2) \qquad \theta = [b, g]$$

Betrakta felmoderna:

NF	$g = 1, b = 0$	"no fault"
F_b	$g = 1, b \neq 0$	"bias fault"
F_g	$g \neq 1, b = 0$	"gain fault"

Konstruera en teststorhet för fallet

	NF	F_b	F_g
T	0	0	X

$\Theta^0 = \{[b, g] \mid g = 1\}$

Exempel, forts.

Använd de generella formlerna:

$$T(z) = \min_{\theta \in \Theta^0} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \|y(t) - \hat{y}(t|\theta, z)\|^2 = \min_{b} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \hat{y}(t|b, u))^2$$

$$\hat{y}(t|b, u) = u(t) + b$$

$\Rightarrow$

$$T(z) = \min_{b} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - u(t) - b)^2$$

Minimeringen är enkel

$$T(z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - u(t) - \hat{b})^2 \qquad \text{där} \qquad \hat{b} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - u(t))$$

Notera att bias-felet har avkopplats i $T(z)$.

Minimering av $V(\theta, z)$

$$V(\theta, z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \|y(t) - \hat{y}(t|\theta)\|^2$$

$$T(z) = \min_{\theta \in \Theta^0} V(\theta, z)$$

- generell optimering
- systemidentifiering
- minstakvadratmetoden
- observatörer, Kalman filter
- on-line vill man gärna ha rekursiva algoritmer
- ...

Linjär regression; minstakvadrat-metoden

Trevligt specialfall: Linjär regression ger analytisk lösning på optimeringen

$$y(t) = \varphi(t)\theta$$

Stapla N data ovanpå varandra, modellen blir då $Y = \Phi\theta$ där

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(N) \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

Då kan teststorheten tecknas

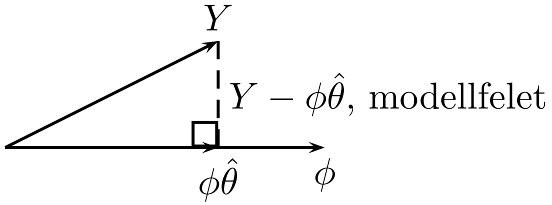
$$T(z) = \min_{\theta} \sum_{t=1}^{N} \|y(t) - \hat{y}(t|\theta)\|^2 = \min_{\theta} \|Y - \hat{Y}\|^2 = \min_{\theta} \|Y - \Phi\theta\|^2$$

Linjär regression; minstakvadrat-metoden

$$T(z) = \min_{\theta} \|Y - \Phi\theta\|$$

Med N data är modellen $Y - \Phi\theta$ överbestämd och skattningen av θ som minimerar prediktionsfelet $\|Y - \Phi\theta\|$ ges av ett normalekvationen:

$\Phi^T(Y - \Phi\hat{\theta}) = 0 \;\Leftrightarrow\;$ ortogonalitet mellan modellprediktion och modellfel



Givet excitation så ges ett unikt $\hat{\theta}$ av det analytiska uttrycket:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y \qquad \min_{\theta} \|Y - \Phi\theta\| = \|Y - \Phi\hat{\theta}\| =$$

$$= (I - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T)Y = P_r Y$$

Numeriskt är detta inget bra sätt att faktiskt räkna ut skattningen.

Excitation

För att ekvationen

$$\Phi^T(Y - \Phi\hat{\theta}) = 0$$

ska ge ha en unik lösning krävs att Φ måste ha full kolonnrang, dvs systemet måste exciteras.

Det spelar dock ingen roll för residualen

$$r = |Y - \hat{Y}| = |Y - \Phi\hat{\theta}|$$

vi använder ju inte värdet på skattningen. (Det finns alltid ett kortaste avstånd från en punkt till de plan som kolonnvektorerna i Φ spänner upp).

Stokastiska beskrivningar i modellen kan användas för att beräkna kvaliteten på skattningen av θ, typiskt ett variansmått. Mer om det senare.

Excitation

Diskussionen runt excitation gäller generellt, men den är enkel att redovisa i fallet linjär regression.

Om vi inte har tillräcklig excitation så har ekvationen inte en unik lösning, men den har lösningar.

$$\Phi^T(Y - \Phi\hat{\theta}) = 0$$

- unik lösning eller inte, spelar det någon roll?
- algoritm måste ta hänsyn
- kvalitet hos skattningen

Linjär regression - rekursiv lösare

Om man har en linjär regression

$$y_t = \varphi_t\theta$$

så finns det flera olika sätt att skatta parametern θ. Ett sätt har vi redan sett, att stapla N datapunkter på varandra och lösa ett minsta-kvadratproblem.

Ett sätt att få en rekursiv algoritm är att beskriva parametern som en slumpvandring

$$\theta_{t+1} = \theta_t + v_t$$
$$y_t = \varphi_t\theta_t + \epsilon_t$$

och applicera ett standard Kalman-filter. En enklare variant är Recursive Least Squares (RLS) som är ett specialfall av Kalmanfilter-lösningen ovan.

Mer generellt statiskt fall

Är det kört om systemet inte är given som en linjär regression? Alls inte, bara lite svårare. Applicera någon metod för att skatta parametrar i olinjära modeller

$$y_t = g(\theta, z_t)$$

Ett enkelt sätt om man rekursivt vill följa parametern är att

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= \theta_t + v_t \\ y_t &= g(\theta_t, z_t) + \epsilon_t \end{aligned}$$

och applicera favoriten bland olinjära tillståndsskattare. Exempelvis (Extended-) Kalman Filter, UKF, ...

Svårt att bevisa konvergens för godtyckliga olinjära funktioner $g(\theta, z)$ men standardmetoder kan ofta fungera mycket bra.

Mer generella dynamiska fall då?

Mer generellt då, när det inte är en linjär regression? Antag att modellen under nollhypotesen ges av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, u, \theta) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Här kan man göra på samma sätt

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= g(\hat{x}(t), u(t), \hat{\theta}(t)) + K_1(y(t) - h(\hat{x}(t))) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= 0 + K_2(y(t) - h(\hat{x}(t))) \end{aligned}$$

och konstruera teststorheten, exempelvis, som

$$T(t) = \int_{t-\Delta T}^{t} (y(\tau) - h(\hat{x}(\tau)))^2 d\tau$$

Ganska allmänt! Vi återkommer mer senare till observatörer, de är en mycket användbar metod att tillgripa som fungerar i många situationer.

Exempel på EKF som residualgenerator

Antag modellen

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - T_s\beta x_t + T_s u \\ y_t &= x_t + f_t \end{aligned}$$

där vi vill detektera fel f_t även då β varierar långsamt. Modellen under noll-hypotesen, med tillagt mät och processbrus, är

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_{t+1} \\ x_{t+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta_t \\ x_t - T_s\beta_t x_t + T_s u \end{pmatrix} + w_t \\ y_t &= x_t + e_t \end{aligned}$$

Extended Kalman Filter

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= g(x_t, w_t), & \text{cov } w_t &= Q_t \\ y_t &= h(x_t) + e_t, & \text{cov } e_t &= R_t \end{aligned}$$

Mätuppdatering

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1})) \\ K_t &= P_{t|t-1}H_t^T(H_tP_{t|t-1}H_t^T + R_t)^{-1} \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - K_tH_tP_{t|t-1} \end{aligned}$$

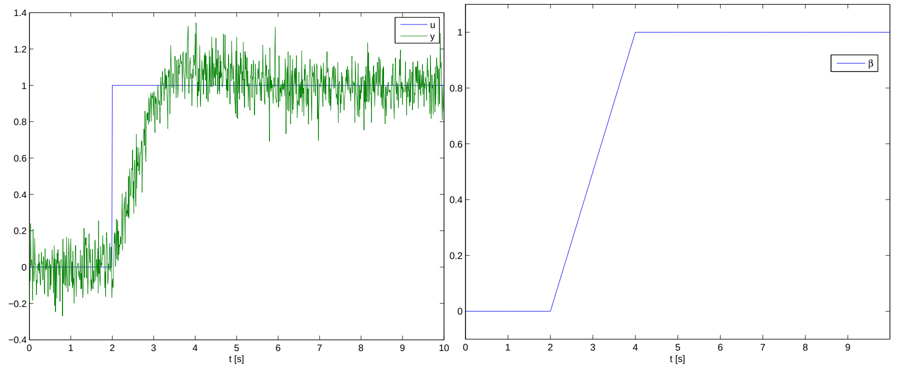
$$H_t = \frac{\partial}{\partial x}h(x)|_{x=\hat{x}_{t|t-1}}$$

Tidsuppdatering

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t} &= g(\hat{x}_{t|t}, 0) \\ P_{t+1|t} &= F_tP_{t|t}F_t^T + G_tQ_tG_t^T \end{aligned}$$

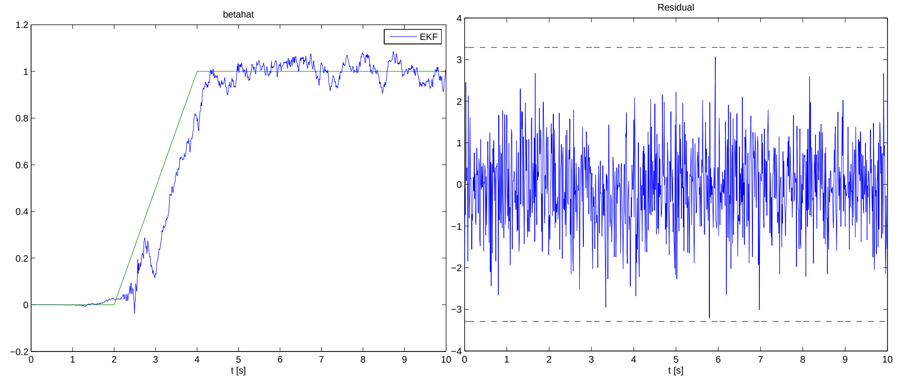
$$\begin{aligned} F_t &= \frac{\partial}{\partial x}g(x, w)|_{x=\hat{x}_{t|t}, w=0} \\ G_t &= \frac{\partial}{\partial w}g(x, w)|_{x=\hat{x}_{t|t}, w=0} \end{aligned}$$

EKF som residualgenerator



$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= x_t - T_s\beta x_t + T_s u\\
y_t &= x_t + f_t
\end{aligned}
$$

EKF som residualgenerator



$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= x_t - T_s\beta x_t + T_s u\\
y_t &= x_t + f_t
\end{aligned}
$$

Översikt

- *Beteendemoder och beteendemodeller*
- *Teststorheten och modellvalidering*
- *Design av teststorheter*
  - *Prediktionsfel*
  - *Parameterskattningar*
  - *Likelihood-funktionen*
- *Avslutning*

Teststorheter baserade på parameterskattningar

Enkel idé: Om alla fel modelleras med avvikelser i konstanta parametrar θ_i, skatta alla parametrar och jämför med deras nominella värden.
En vanlig ansats är då något i stil med

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} V(\theta, \text{observationer})$$

där $V(\theta, \text{observationer})$ är en modellvalideringsfunktion för hela modellen, inklusive alla felparametrar.

- Varför är detta inte alltid en attraktiv lösning?
- Metoden kräver unik lösning på minimeringen, dvs excitation.
- Storlek på felvektorn

Teststorheter baserade på parameterskattningar

Enkel idé: skatta ett element θ_i i feltillståndsvektorn θ och jämför med det nominella (dvs. felfria) värdet θ_i^0.
Om mängden Θ^0 består av ett enda element:

$$T(\mathbf{x}) = \|\hat{\theta}_i - \theta_i^0\| \qquad \hat{\theta}_i = \arg\min_{\theta_i} V'(\theta_i, \mathbf{x})$$

där $V'(\theta_i, \mathbf{x})$ är något modellvaliderings mått.

Hur blir det med isolering? Om det i verkligheten är ett fel i parameter θ_1 som inträffat, vad händer med skattningen av parameter θ_2?

Isolering blir lidande. När $\hat{\theta}_2$ avviker från sitt nominella värde, beror det på θ_2 eller någon annan förändring?

Teststorheter baserade på parameterskattningar

	F_1	F_2	F_3
T_1	0	X	X
T_2	X	0	X
T_3	X	X	0

För till exempel test T_1 skulle man då kunna göra

$$T_1 = |\hat{\theta}_2 - \theta_2^{nom}|$$

där

$$\hat{\theta}_2 = \arg_{\theta_2} \min_{\theta_1, \theta_2} V(\theta_1, \theta_2, \text{observationer})$$

Som synes måste man skatta minst två parametrar, dels variabeln vi vill avkoppla, dels variabeln vi vill jämföra mot sitt nominella värde.

Exempel

$$y(t) = \theta_1 u_1(t) + \theta_2 u_2(t) + \theta_3 u_3(t)$$

$$H^0 : F_p \in \{NF, F_1\}$$
$$H^1 : F_p \in \{F_2, F_3\}$$

$$T = |\hat{\theta}_2 - \theta_2^0|$$

$$\hat{\theta}_2 = \arg_{\theta_2} \min_{\theta_1, \theta_2} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \theta_1 u_1(t) - \theta_2 u_2(t) - u_3(t))^2$$

Minimeringen kan lösas med linjär regression. Teststorheten kan också beräknas rekursivt.

Översikt

Teststorhet baserad på likelihood-funktionen

Definition (Likelihood Function)

Let $f(\mathbf{z}|\theta)$ denote the probability density function of the sample $\mathbf{Z} = [Z_1,\ Z_2,\ \ldots\ Z_n]$. Then, given that $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ is observed, the function of θ defined by

$$L(\theta|\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}|\theta)$$

is called the likelihood function.

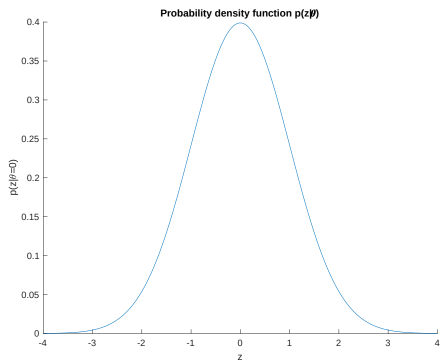
En teststorhet kan formas som:

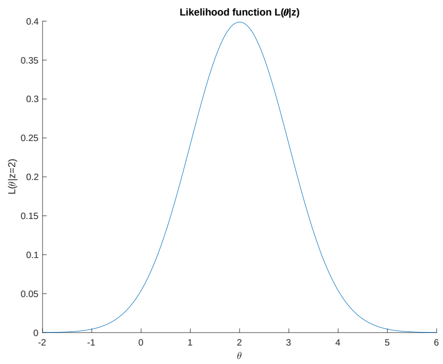
$$T(\mathbf{z}) = \max_{\theta \in \Theta^0} L(\theta|\mathbf{z})$$

Notera: likelihood-funktionen är en funktion av θ medans täthetsfunktionen är en funktion av $\mathbf{z}$.
Tolkning: Hur sannolikt är det att observera det utfall vi observerat.

Likelihood-funktionen, normalfördelning, 1 observation

Modell: $Z \sim N(\theta, 1)$
En observation: $z = 2$





Täthetsfunktionen
$$f(z|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\theta)^2}{2}}$$

Likelihood-funktionen
$$L(\theta|z = 2) = f(2|\theta)$$

Likelihood-funktionen, normalfördelning, 2 observationer

Modell: $Z \sim N(\theta, 1)$

$$f(z|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\theta)^2}{2}}$$

Antag två oberoende observationer, z_1 och z_2 från modellen. Hur ser då täthetsfunktionen ut

$$f(z_1, z_2|\theta) = ?$$

Med oberoendeantagandet så gäller att

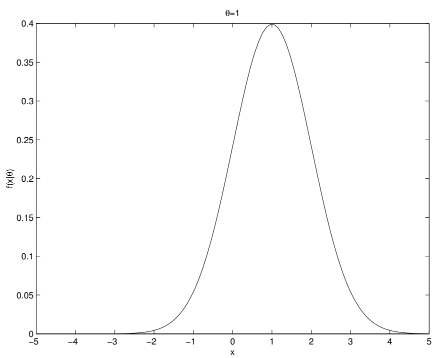
$$f(z_1, z_2|\theta) = f(z_1|\theta)f(z_2|\theta)$$

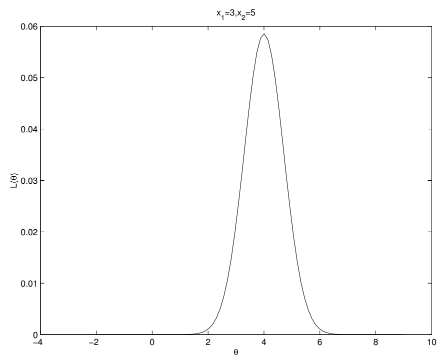
dvs.

$$f(z_1, z_2|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_1-\theta)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_2-\theta)^2}{2}}$$

Likelihood-funktionen, normalfördelning, 2 observationer

Modell: $Z \sim N(\theta, 1)$
Två oberoende observationer: $z_1 = 3, z_2 = 5$





Täthetsfunktionen
$$f(z_i|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_i-\theta)^2}{2}}$$

Likelihood-funktionen
$$L(\theta|z_1 = 3, z_2 = 5) = f(3|\theta)f(5|\theta)$$

Teststorheter baserade på likelihood-funktionen, forts.

Likelihood-funktionen säger (≈) hur sannolikt det är att observera det utfall vi observerat. Därför bildas teststorheten genom att maximera

$$T(\mathbf{z}) = \max_{\theta \in \Theta^0} L(\theta|\mathbf{z})$$

istället för att minimera. Detta kallas maximum-likelihood (ML).
Nollhypotesen kommer därför att förkastas om $T(\mathbf{z})$ är mindre än en tröskel.
Man kan använda likelihood-funktionen för att skatta parametrar.
ML-skattningen fås som:

$$\theta_{ML} = \arg\max_{\theta} L(\theta)$$

Mycket vanligt sätt att bilda teststorheter då man har statistiska modeller.
Vi kommer återkomma till ML i avsnittet om "Change detection".

Likelihood och Bayes

Om man räknar ut

$$T(\mathbf{z}) = \max_{\theta \in \Theta^0} L(\theta|\mathbf{z})$$

med $H_0 : F_p = F_i$ så har man samtidigt räknat ut

$$\max_{\theta \in \Theta^0} L(\theta|\mathbf{z}) = \max_{\theta \in \Theta^0} f(\mathbf{z}|\theta) = P(\mathbf{z}|F_i)$$

Om man har en a-priori sannolikhet för de olika felmoderna så kan man via Bayes sats göra omskrivningen

$$P(F_i|\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z}|F_i)P(F_i)}{P(\mathbf{z})}$$

Genom att beräkna sannolikheten för alla felmoder F_i så får vi en ranking av felen baserad på dess sannolikheter.

Mer om detta senare i kursen.

Neyman-Pearson lemma, likelihood-kvot

Antag hypoteserna

$$H^0 : \theta = \theta_0$$
$$H^1 : \theta = \theta_1$$

där pdf för observationerna är den kända fördelningsfunktionen $f(z|\theta_i)$ i de två fallen.

En lite "slarvig" formulering av Neyman-Pearson lemma är då:
Den bästa tänkbara teststorheten för dessa hypoteser är

$$T(z) = \frac{f(z|\theta_1)}{f(z|\theta_0)}$$

Finns generaliserade resultat för nollhypoteser som inte är singeltons.

Mer om detta senare i kursen.

Översikt

- Beteendemoder och beteendemodeller
- Teststorheten och modellvalidering
- Design av teststorheter
  - Prediktionsfel
  - Parameterskattningar
  - Likelihood-funktionen
- Avslutning

- En teststorhet är ett modellvalideringsmått
- 4 allmänna principer för att konstruera teststorheter
  1. prediktionsfel
  2. parameterskattning
  3. likelihood-funktionen
  4. residualer, konsistensrelationer och observatörer
- Ej ortogonala och inga principer för när och hur.

Nästa gång: Tröskelsättning och försöka svara på frågan, hur bra är ett specifikt test?

TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 5 - Konstruktion av teststorheter

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
`erik.frisk@liu.se`

2020-04-15