Lösningsförslag/facit till Tentamen

TSFS06 Diagnos och övervakning
15 januari, 2009, kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel: TeFyMa, Beta, Physics Handbook, Reglerteknik (Glad och Ljung), Formelsamling i statistik och signalteori samt miniräknare.

Ansvarig lärare: Erik Frisk, tel 285714.

Totalt 40 poäng.
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: 18 poäng
Betyg 4: 25 poäng
Betyg 5: 30 poäng

Uppgift 1.

a) En formulering av modellen på formen

$$0 = H(p)x + L(p)z + F(p)f$$

ges av ekvationerna

$$0 = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & 0 \\ -1 & p & 0 \\ 0 & -1 & p \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_u \end{pmatrix}$$

b) Alla fel är detekterbara. Detta kan ses, tillexempel genom att observera att ingen kolumn i $F(p)$ spänns upp av kolumnerna i $H(p)$. Exempelvis, för första kolumnen i $F(p)$ ser man det genom att övertyga sig själv om att ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & 0 \\ -1 & p & 0 \\ 0 & -1 & p \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ej har en lösning.

För att avgöra stark respektive svag detekterbarhet så kan man antingen räkna ut en bas för vänster nollrum till $H(p)$, exempelvis

$$N_H(p) = \begin{pmatrix} 1 & p+1 & 0 & p(p+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & p \end{pmatrix}$$

och multiplicera ihop med $F(p)$.

c) Isolerbarhetskravet ger att residualen ska vara känslig för felen f_u och f_1 men inte känslig för f_2. Vi får därmed inte använda oss av sensor y_2 i residualgeneratorn.

Direkt från modellen får vi att

$$y_1 = \frac{1}{p(p+1)}(u + f_u) + f_1$$

En konsistensrelation fås därmed som

$$\begin{pmatrix} p(p+1) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u \end{pmatrix} = 0$$

Lägger vi på residualgeneratordynamik så får man till exempel residualgeneratorn

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^3} \begin{pmatrix} p(p+1) & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1} \begin{pmatrix} p^2 + p & -1 \end{pmatrix}$$

Direkt användning av tipset i uppgiften ger en tillståndsbeskrivning av residualgeneratorn som

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} w$$

Uppgift 2.

a) Då T_2 och T_3 larmar genereras konflikterna

$$\pi_2 = OK(A) \wedge OK(B) \wedge OK(C)$$
$$\pi_3 = OK(B) \wedge OK(C) \wedge OK(D)$$

En konflikt är en utsaga som *inte* kan vara sann. För en mängd detekterade konflikter så är diagnoserna konsistenta med alla negerade konflikter. Ett annat sätt att säga samma sak är att en diagnos ska kunna förklara alla detekterade konflikter.

Exempelvis, med konflikterna ovan, så är

$$\mathcal{D} = OK(A) \wedge \neg OK(B) \wedge OK(C) \wedge OK(D)$$

en diagnos eftersom en trasig komponent B kan förklara att både T_2 och T_3 larmar. Alternativt, med en mängdrepresentation av konflikter och diagnoser kan Sats 3.5 i textkompendiet användas

$$\neg\pi_2 \cap \mathcal{D} = \{\neg OK(A), \neg OK(B), \neg OK(C)\} \cap \{\neg OK(B)\} = \{\neg OK(B)\} \neq \emptyset$$
$$\neg\pi_3 \cap \mathcal{D} = \{\neg OK(B), \neg OK(C), \neg OK(D)\} \cap \{\neg OK(B)\} = \{\neg OK(B)\} \neq \emptyset$$

b) Fel i komponent B och D kan inte isoleras från fel i komponent C men i övrigt kan felen isoleras från varandra. Detta sammanfattas i isolerbarhetsmatrisen

	A	B	C	D
A	X			
B		X	X	
C			X	
D			X	X

c) Då båda komponenterna A och D är felaktiga kommer, enligt antagandet i uppgiften, alla tester att reagera. Då får vi konflikterna som representeras av mängderna

$$\{A\}$$
$$\{A, B, C\}$$
$$\{B, C, D\}$$
$$\{C, D\}$$

En diagnos är ett *hitting-set* för alla 4 konflikterna. Men eftersom endast den första och den sista konflikten är minimal räcker det med att ta fram hitting-set för dessa två, dvs $\{A\}$, samt $\{C, D\}$. Då ses det att de minimala diagnoserna är

$$\{A, C\}, \{A, D\}$$

dvs. det finns två minimala diagnoser

$$\mathcal{D}_1 = \neg OK(A) \wedge OK(B) \wedge \neg OK(C) \wedge OK(D)$$
$$\mathcal{D}_2 = \neg OK(A) \wedge OK(B) \wedge OK(C) \wedge \neg OK(D)$$

d) Det finns 6 möjliga dubbelfel. Nedan redovisas enkelfelsdiagnoser för fallen

$$A, B \to \emptyset$$
$$A, C \to \emptyset$$
$$A, D \to \emptyset$$
$$B, C \to \{C\}$$
$$B, D \to \{C\}$$
$$C, D \to \{C\}$$

Alltså tolkas de tre sista dubbelfelen som enkelfelsdiagnosen $OK(A) \wedge OK(B) \wedge \neg OK(C) \wedge OK(D)$

e) För då kommer, enligt svaret på d-uppgiften, systemet att peka ut komponent C som felande och inga andra vilket alltså är missvisande.

Uppgift 3.

a) Derivering av mätsignalen en och två gånger ger

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1x_2 + u_2 = -x_1y + u_2 \\
\ddot{y} &= -x_1\dot{y} - \dot{x}_1y + \dot{u}_2 = -x_1\dot{y} - (-x_1 + u_1)y + \dot{u}_2 = x_1(y - \dot{y}) - u_1y + \dot{u}_2
\end{aligned}$$

Problemet nu är att vi inte har blivit av med den okända signalen x_1. Men, multiplicerar vi första ekvationen med $(y - \dot{y})$, den andra med y och adderar dem så får vi

$$(y - \dot{y})\dot{y} + y\ddot{y} = (y - \dot{y})u_2 - u_1y^2 + y\dot{u}_2$$

Om vi antar $\dot{y}$ och $\ddot{y}$ kända så kan vi beräkna en residual enligt

$$r = (y - \dot{y})\dot{y} + y\ddot{y} - (y - \dot{y})u_2 + u_1y^2 - y\dot{u}_2$$

b) Systemet kan antas observerbart, information om x_2 syns direkt i mätsignalen och information om x_1 fås genom att x_1 påverkar $\dot{x}_2$. En observatör och residualgenerator kan då skrivas

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + u_1 + K_1(y - \hat{x}_2) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_1\hat{x}_2 + u_2 + K_2(y - \hat{x}_2) \\
r &= y - \hat{x}_2
\end{aligned}$$

där observatörsförstärkningarna kan tas fram, till exempel genom att linjärisera systemet runt en arbetspunkt och bestämma en stabiliserande återkoppling.

c) Modellen med den nya konstanta/långsamt varierande parametern θ blir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + \theta u_1 \\
\dot{x}_2 &= -x_1x_2 + u_2 \\
\dot{\theta} &= 0 \\
y &= x_2
\end{aligned}$$

En observatör kan konstrueras på samma sätt som i b-uppgiften, dvs.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + \hat{\theta}u_1 + K_1(y - \hat{x}_2) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_1\hat{x}_2 + u_2 + K_2(y - \hat{x}_2) \\
\dot{\hat{\theta}} &= 0 + K_3(y - \hat{x}_2) \\
r &= y - \hat{x}_2
\end{aligned}$$

Uppgift 4.

a)

$$\begin{aligned}
P(\text{missad detektion}) &= P(|r| < J) = P(r - \theta < J - \theta) - P(r - \theta < -J - \theta) = \\
&= \Phi(J - \theta) - \Phi(-J - \theta) \\
P(\text{falsklarm}) &= P(|r| < J|\theta = 0) = 2P(r < -J|\theta = 0) = 2\Phi(-J)
\end{aligned}$$

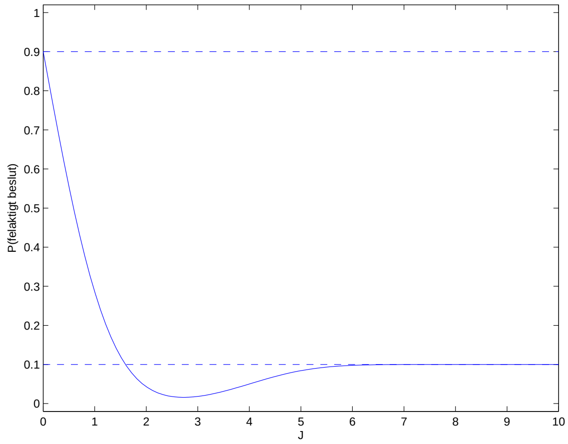
b) Med ovanstående sannolikheter kan man teckna sannolikheten för felaktigt beslut som

$$\begin{aligned} P(\text{fel slutsats}) &= P(\text{inget larm}|C\text{ trasig})P(C\text{ trasig}) + P(\text{larm}|C\text{ ej trasig})P(C\text{ ej trasig}) = \\ &= P(\text{missad detektion})P(C\text{ trasig}) + P(\text{falsklarm})P(C\text{ ej trasig}) = \\ &= (\Phi(J-\theta) - \Phi(-J-\theta))\alpha + 2\Phi(-J)(1-\alpha) \end{aligned}$$

och optimeringsproblemet som ska lösas är då

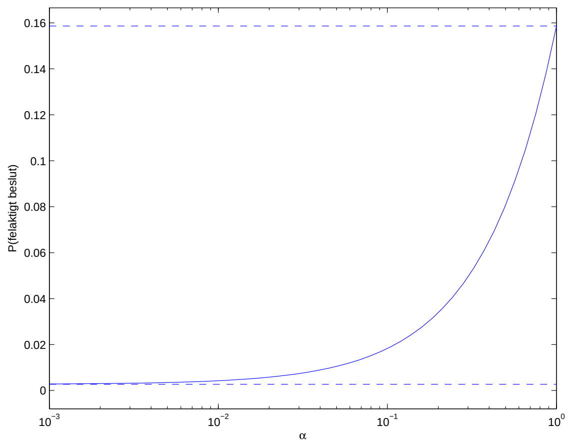
$$\min_J \; (\Phi(J-\theta) - \Phi(-J-\theta))\alpha + 2\Phi(-J)(1-\alpha)$$

Då $J \to 0$ så $P(\text{falsklarm}) \to 1$ och $P(\text{missad detektion}) \to 0$ vilket ger att målfunktionen går mot $1-\alpha$. I andra änden så gäller att då $J \to \infty$ så $P(\text{falsklarm}) \to 0$ och $P(\text{missad detektion}) \to 1$ vilket ger att målfunktionen går mot α. Med rimligt värde på α ($\alpha < 0.5$) så är målfunktionen större för små trösklar än för höga trösklar. Frågan är hur den ser ut däremellan. Ett exempel är



men den kan se ut på väldigt många sätt beroende på vilka felstorlekar θ och värden på α som beaktas.

Tittar man på beroendet på α så för väldigt låga α, dvs. komponenten går i stort sett aldrig sönder, är det falsklarmssannolikheten som dominerar och omvänt för stora α är det sannolikheten för missad detektion som dominerar. Med ett tröskelval så att falsklarmssannolikheten är mindre än sannolikheten för missad detektion kan uttrycket se ut enligt figuren nedan



c) Se Exempel 2.2.1 i tilläggsmaterialet ”Change Detection Algorithms”.

Uppgift 5.

a) Se textkompendium

b) Ett exempel är

$$r = \frac{1}{W(z)}(\hat{\eta} - \eta_0)$$

där η_0 är den nominella verkninsgraden.

c) Forma en överföringsfunktion $W(s)$ som är stor runt 1 rad/s och ca 1 i övrigt, då kan den adaptiva tröskeln genereras enligt

$$J_{adap} = c_1 W(p) u + c_2$$

där c_1 och c_2 är tröskelvariabler som kalibreras till lämpliga värden.

Uppgift 6. Här kan man tänka på flera sätt. Ett direkt sätt är att teckna observationsmängderna för alla tänkbara felkombinationer. Eftersom det finns 5 komponenter finns det $2^5 = 32$ fall att hantera. Lyckligtvis är det endast ett fåtal som behöver behandlas explicit.

Låt $z = (a, b, c, d, e, f, g)$ samt låt exempelvis $\mathcal{O}(M_1, M_2)$ beteckna de observationer som är konsistenta för fallet då komponenterna M_1 och M_2 är trasiga och övriga komponenter hela. Det visar sig, efter lite eftertanke/räknande, att endast 5 olika observationsmängder finns

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \{z : f - ac - bd = 0 \ \wedge \ g - ce - bd = 0\} \\
\mathcal{O}_2 &= \{z : f - ac - bd = 0\} \\
\mathcal{O}_3 &= \{z : g - ce - bd = 0\} \\
\mathcal{O}_4 &= \{z : f - g - ac + ce = 0\} \\
\mathcal{O}_5 &= \mathbb{R}^7
\end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \mathcal{O}(NF) \\
\mathcal{O}_2 &= \mathcal{O}(M_3) = \mathcal{O}(A_2) = \mathcal{O}(M_3, A_2) \\
\mathcal{O}_3 &= \mathcal{O}(M_1) = \mathcal{O}(A_1) = \mathcal{O}(M_1, A_1) \\
\mathcal{O}_4 &= \mathcal{O}(M_2) \\
\mathcal{O}_5 &= \text{alla övriga}
\end{aligned}$$

Ett komplett diagnossystem kan därmed konstrueras via residualerna

$$\begin{aligned}
r_1 &= f - ac - bd \\
r_2 &= g - ce - bd \\
r_3 &= f - g - ac + ce
\end{aligned}$$

som genererar konflikterna

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= OK(M_1) \wedge OK(M_2) \wedge OK(A_1) \\
\pi_2 &= OK(M_2) \wedge OK(M_3) \wedge OK(A_2) \\
\pi_3 &= OK(M_1) \wedge OK(M_3) \wedge OK(A_1) \wedge OK(A_2)
\end{aligned}$$

vid larm. Dessa konflikter kan sedan behandlas med den multipelfelisoleringsalgoritm som beskrivs i kurskompendiets kapitel 2.