Tentamen med lösningsdiskussion

TSFS06 Diagnos och övervakning
1 juni, 2013, kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel: TeFyMa, Beta, Physics Handbook, Reglerteknik (Glad och Ljung), Formelsamling i statistik och signalteori samt miniräknare.

Ansvarig lärare: Erik Frisk

Totalt 40 poäng.
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: 18 poäng
Betyg 4: 25 poäng
Betyg 5: 30 poäng

Uppgift 1. Antag en process som i sitt felfria fall beskrivs av den linjära modellen

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2
\end{aligned}$$

där vi har två sensorer y_1 och y_2 samt en aktuator u.

a) Modellera fel i sensorer och aktuatorn och avgör om felen är detekterbara, ange om de är starkt eller svagt detekterbara, samt vilka fel som går att isolera från varandra. Sammanfatta i en isolerbarhetsmatris. (3 poäng)

b) Skapa en residualgenerator som detekterar fel i aktuatorn. Om aktuatorfelet är starkt detekterbart i modellen skall det även vara starkt detekterbart i residualen.

Skapa också en residualgenerator som isolerar fel i sensor 2 från fel i aktuatorn.

Båda residualgeneratorerna skall skrivas på tillståndsform och inga derivator får approximeras numeriskt. Tidskonstanten för residualgeneratorerna skall ej överstiga $\tau = 0.1$ sekunder (alla poler till vänster om $s = -10$). (3 poäng)

c) Är det möjligt att skapa en residual som isolerar konstanta fel i sensor 1 från konstanta fel i sensor 2? Motivera. (2 poäng)

Tips: Den observerbara kanoniska formen av överföringsoperatorn

$$G(p) = \frac{b_1 p^{n-1} + \cdots + b_{n-1} p + b_n}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}$$

är

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

Lösning.

a) Felen kan modelleras som

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u + f_3) \\
y_1 &= x_1 + f_1 \\
y_2 &= x_2 + f_2
\end{aligned}$$

Modellen har redundans 2 och exempelvis kan alla konsistensrelationer skrivas som linjärkombinationer av

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 + y_1 - y_2 &= 0 \\
\dot{y}_2 - u &= 0
\end{aligned}$$

Här ser man att alla fel är starkt detekterbara.

För isoleringen ger den första konsistensrelationen att fel f_1 och f_2 kan isoleras från fel f_3. Den andra ger att fel f_2 och f_3 kan isoleras från fel f_1. Genom att derivera den första konsistensrelationen och substituera in den andra så får vi

$$\ddot{y}_1 + \dot{y}_1 - u = 0 \tag{1}$$

vilket ger att f_1 och f_3 är isolerbara från fel f_2. Sammanfattningsvis har vi därmed isolerbarhetsmatrisen

	f_1	f_2	f_3
f_1	X		
f_2		X	
f_3			X

b) Väljer konsistensrelation 2 ovan, vilket med dynamik och $\alpha > 10$, ger

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\alpha\, w - \alpha y_2 - u\\ r_1 &= w + y_2\end{aligned}$$

där tillståndet är valt som $w = r_1 - y_2$.

En residual som isoleras fel i sensor 2 från aktuatorn ges av första konsistensrelationen

$$\dot{r}_2 + \alpha r_2 = \dot{y}_1 + y_1 - y_2$$

Med tillstånd $w = r_2 - y_1$ fås residualgeneratorn, igen med $\alpha > 10$,

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\alpha\, w + (1-\alpha)y_1 - y_2\\ r_2 &= w + y_1\end{aligned}$$

c) Nej, det är inte möjligt eftersom den enda konsistensrelation som innehåller sensor y_1 men ej sensor y_2 är (1) och där ingår sensorn y_1 endast i deriverad form.

Uppgift 2. Antag att en residual genererats där fel påverkar väntevärdet hos residualen. För enkelhets skull, antag att

$$r(t) \sim \mathcal{N}(f, \sigma^2)$$

där f är felstorleken och σ är standardavvikelsen som kan antas känd.

a) Antag att ett larm genereras då absolutvärdet på r överstiger en specifik tröskel J och att vi vill ha en falsklarmssannolikhet för testet lika med α. Visa hur tröskeln väljs och uttryck tröskeln med hjälp av fördelningsfunktionen (och dess invers) (1 poäng)

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \quad X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

b) Uttryck styrkefunktionen, $\beta(f)$, för testet med hjälp av $\Phi(x)$ samt skissa ett typiskt utseende på styrkefunktionen. (2 poäng)

c) Ett annat sätt att utvärdera ett tests prestanda är en ROC-kurva, dvs. en kurva där sannolikheten för detektion plottas mot sannolikheten för falskalarm för en given felstorlek. Kurvan parametriseras av olika värden på tröskeln J. Beskriv hur en sådan kurva tas fram samt skissa typiskt utseende. Diskutera fördelar respektive nackdelar med att använda styrkefunktioner eller ROC-kurvor för att utvärdera prestanda hos ett test. (2 poäng)

d) Diskutera svårigheter att ta fram styrkefunktionen i en verklig situation samt skissa möjliga lösningar. (2 poäng)

Lösning.

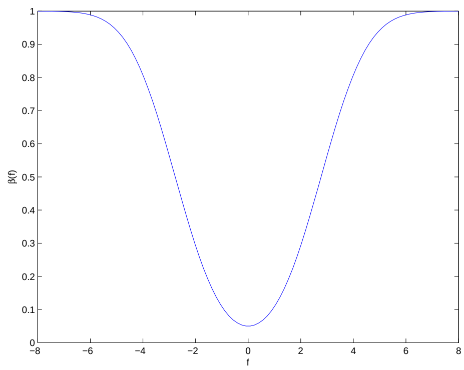
a) Tröskeln väljs som (uttrycken är ekvivalenta)

$$J = -\sigma\,\Phi^{-1}(\alpha/2) = \sigma\,\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$$

b)

$$\begin{aligned}\beta(f) &= P(|r| > J|f) = 1 - P(-J \le r \le J|f) = \\ &= 1 - P(-\frac{J+f}{\sigma} \le \frac{r-f}{\sigma} \le \frac{J-f}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{J-f}{\sigma}) + \Phi(-\frac{J+f}{\sigma})\end{aligned}$$

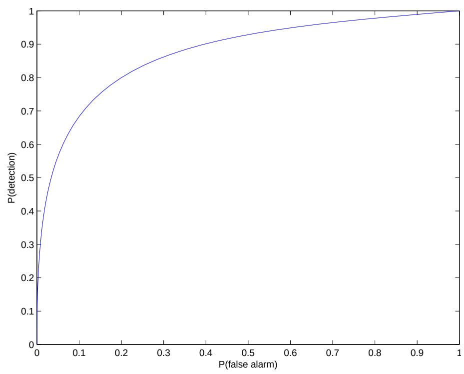
vilket typiskt kan se ut som



c) Sannolikheterna på ROC-kurvan parametriseras av tröskeln J enligt

$$\begin{aligned}P(\text{detektion}) &= 1 - \Phi(\frac{J-f}{\sigma}) + \Phi(-\frac{J+f}{\sigma}) \\ P(\text{falsklarm}) &= 2\,\Phi(-J/\sigma)\end{aligned}$$

vilket kan se ut som



En viktig skillnad mellan styrkefunktioner och ROC-kurvor är att i det förra så är det tröskeln som är fixerad/bestämd medans felstorleken är fri och i det senare prestandamåttet så är det tvärtom. Vilket som är fördel respektive nackdel är typiskt applikationsberoende.

Uppgift 3. Betrakta det olinjära systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

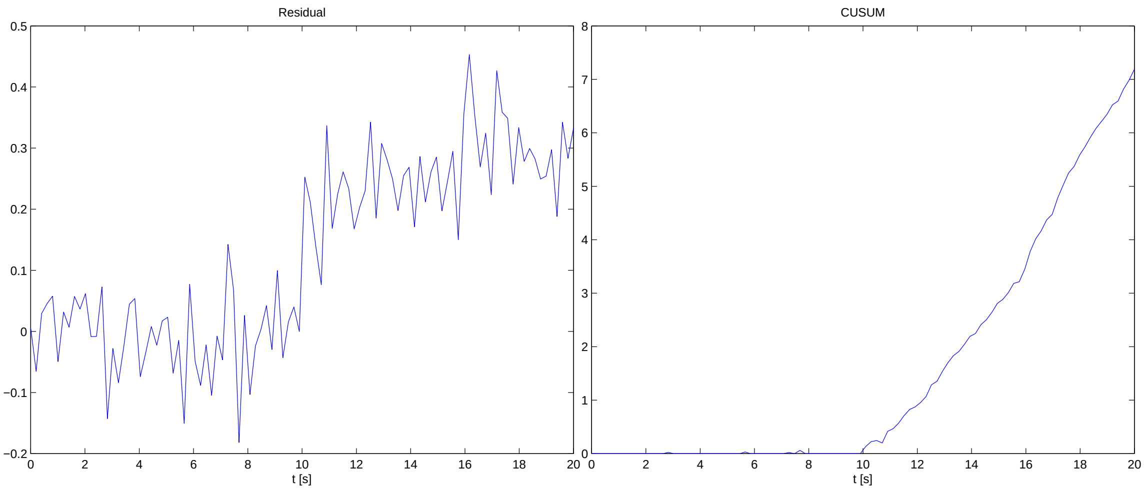
där u är känd insignal och y känd mätsignal.

Konstruera en olinjär residualgenerator som indikerar för fel i sensorn. Skriv residualgeneratorn på tillståndsform där inga derivator approximeras numeriskt. Kommentera och motivera designval, diskutera hur designparametrar väljs, och hur designparametrarnas värden påverkar prestanda hos residualgeneratorn. (5 poäng)

Lösning.
för det här systemet visar det sig svårt att ta fram en konsistensrelationsbaserad lösning, så en observatörbaserad är att föredra. En enkel ansats är

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{x}_1 + \sin\hat{x}_2 + K_1(y - \hat{x}_1)\\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2 + u + K_2(y - \hat{x}_1)\\ r &= y - \hat{x}_1\end{aligned}$$

där K_1 och K_2 valts via en linjärisering av systemet och polplacering. I figuren nedan till vänster syns ett exempel på hur den resulterande residualen reagerar på ett sensorfel vid $t = 10s$. Till höger har residualen efterbehandlats med CUSUM-algoritmen.



Designparametrarna K_1 och K_2 skall inte bara väljas så att observatören blir stabil, placeras polerna långt in i vänster halvplan kommer felkänsligheten att sjunka i residualen. Även brusdämpningen blir sämre ju längre in i vänster halvplan polerna placeras.

Uppgift 4. Antag att 3 residualer konstruerats för att övervaka 4 fel enligt beslutsstrukturen

	f_1	f_2	f_3	f_4
r_1		X	X	X
r_2	X		X	X
r_3	X			X

och där fel f_i indikerar fel i komponent C_i, $i = 1, \ldots, 4$.

a) Sammanfatta isolerbarhetsegenskaperna, via en isolerbarhetsmatris, för ett diagnossystem baserat på de tre residualerna. (2 poäng)

b) Antag att de tre residualerna larmat, ange de genererade konflikterna och ange vilka konflikter som är minimala. Skriv konflikterna med logiknotation och låt $OK(C_i)$ och $\neg OK(C_i)$ beteckna att komponent i är hel respektive icke-hel. (2 poäng)

c) Antag larmen från b-uppgiften, beräkna de minimala diagnoserna. (2 poäng)

d) Förklara när det räcker att beräkna de minimala diagnoserna för att karaktärisera mängden av alla diagnoser. Förklara vad det betyder samt diskutera när villkoren är uppfyllda. (2 poäng)

Lösning.

a) Isolerbarhetsmatrisen blir

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	X			X
f_2		X	X	X
f_3			X	X
f_4				X

b) De tre genererade konflikterna är

$$\pi_1 = OK(C_2) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_4)$$
$$\pi_2 = OK(C_1) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_4)$$
$$\pi_3 = OK(C_1) \wedge OK(C_4)$$

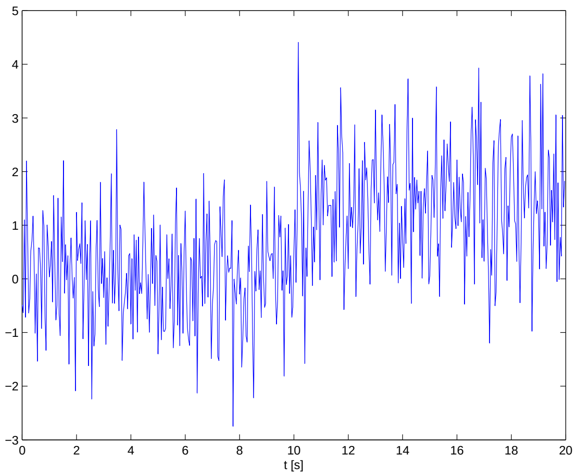
Konflikterna π_1 och π_3 är minimala.

c) De minimala diagnoserna är

$$\mathcal{D}_1 = OK(C_1) \wedge OK(C_2) \wedge OK(C_3) \wedge \neg OK(C_4) \qquad \{C_4\}$$
$$\mathcal{D}_2 = \neg OK(C_1) \wedge \neg OK(C_2) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_4) \qquad \{C_1, C_2\}$$
$$\mathcal{D}_3 = \neg OK(C_1) \wedge OK(C_2) \wedge \neg OK(C_3) \wedge OK(C_4) \qquad \{C_1, C_3\}$$

d) Om systemet ej har felmodeller karaktäriserar de minimala diagnoserna alla diagnoser.

Uppgift 5. Antag att en residualgenerator konstruerats och nedan i figuren ses hur den typiskt svarar på ett fel vid $t = 10$ sekunder.



a) Det är klart att det är svårt att sätta en fix tröskel så att en lämplig balans mellan falsklarmssannolikhet och detektionssannolikhet uppnås och ytterligare efterbehandling av residualen är nödvändig för att kunna ta ett pålitligt beslut. En sådan möjlig efterbehandling är att applicera CUSUM-algoritmen.

Antag att ingen statistisk kunskap om residualen finns, ange hur CUSUM-algoritmen kan användas och skissa utseendet på hur den resulterande teststorheten ser ut. Ange hur eventuella parametrar väljs. (3 poäng)

b) Antag att vi får veta att residualen har fördelningen

$$r(t) \sim \mathcal{N}(f, \sigma^2)$$

där f är en känd felstorlek och σ känd standardavvikelse. Härled en CUSUM-algoritm som utnyttjar den statistiska informationen och skissa hur den resulterande teststorheten ser ut, jämför med resultatet i a-uppgiften. (2 poäng)

Lösning.

a) CUSUM på residualen kan skrivas som

$$T(k) = \max(0, T(k-1) + |r(k)| - \nu), \quad T(0) = 0$$

där driftsfaktorn ν väljs till ett lämpligt värde så att väntevärdet på $|r(k)| - \nu$ är mindre än 0. I figuren ses att ett lämpligt värde på $\nu \approx 1$ vilket ger resultatet i figuren nedan.

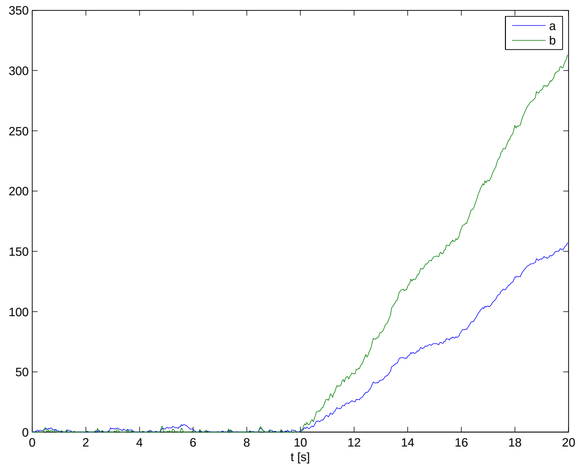
b) Med statistisk kunskap ges CUSUM-algoritmen av uttrycket

$$T(k) = \max(0, T(k-1) + s(k)), \quad T(0) = 0$$

där

$$s(k) = \log \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r(k)-f)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2(k)}{2\sigma^2}}} = -\frac{(r(k)-f)^2}{2\sigma^2} + \frac{r^2(k)}{2\sigma^2} = \frac{f}{\sigma^2}\left(r(k) - \frac{f}{2}\right)$$

Eftersom den här är optimal kan man förvänta sig bättre prestanda än teststorheten ifrån a-uppgiften, vilket syns i figuren nedan.



Uppgift 6. Denna uppgift analyserar rollen hos *priors* vid sannolikhetsbaserad felisolering. För att göra det enkelt, antag en residual r som påverkas av två oberoende fel f_1 och f_2 och larm genereras när residualen överskrider sin tröskel J.

Följande sannolikheter är givna

$$P(f_1) = p_1,\ P(f_2) = p_2,\ P(r > J|\text{felfritt}) = p_{fa}$$
$$P(r > J|f_1) = p_1^{det},\ P(r > J|f_2) = p_2^{det},\ P(r > J|f_1 \& f_2) = p_{12}^{det}$$

a) Tag fram ett uttryck för *i)* sannolikheten för felfritt system givet att $r > J$ samt *ii)* sannolikheten för f_1 respektive f_2 givet att $r > J$. (3 poäng)

b) Antag att felen är väldigt sällsynta, dvs. sannolikheterna p_1 och p_2 är små. Frågan är vad som händer med slutsatserna i a-uppgiften då vi får alarm. Antag att sannolikheten att felen inträffar är lika, dvs. att $p_1 = p_2 = p$, och låt $p \to 0$ i uttrycken från a-uppgiften. Tolka och kommentera resultaten. (2 poäng)

c) Antag att det konstaterats att ett fel har inträffat och att sannolikheterna endast skall användas för felisolering. Beräkna om sannolikheterna från a-uppgiften men där det även är givet att minst ett fel inträffat, dvs. felfritt system har definitivt uteslutits och sannolikhetsberäkningarna skall användas enbart för felisolering. (2 poäng)

Lösning.

a) Använder de tre, binära, stokastiska variablerna F_1, F_2 samt A för alarm. Den stokastiska modellen blir

$$P(f_1, f_2, a) = P(a|f_1, f_2)P(f_1)P(f_2)$$

Då får vi att:

$$\begin{aligned}
P(\neg f_1, \neg f_2|a) &= \frac{P(a|\neg f_1, \neg f_2)P(\neg f_1)P(\neg f_2)}{P(a)} = \frac{p_{fa}(1-p_1)(1-p_2)}{P(a)} \\
P(f_1|a) &= \frac{P(f_1, a)}{P(a)} = \frac{P(f_1, \neg f_2, a) + P(f_1, f_2, a)}{P(a)} = \frac{p_1^{det} p_1(1-p_2) + p_{12}^{det} p_1 p_2}{P(a)} \\
P(f_2|a) &= \frac{P(f_2, a)}{P(a)} = \frac{P(\neg f_1, f_2, a) + P(f_1, f_2, a)}{P(a)} = \frac{p_2^{det}(1-p_1)p_2 + p_{12}^{det} p_1 p_2}{P(a)}
\end{aligned}$$

där sannolikheten för alarm ges av

$$\begin{aligned}
P(a) = \sum_{f_1, f_2} P(f_1, f_2, a) &= P(\neg f_1, \neg f_2, a) + P(f_1, \neg f_2, a) + P(\neg f_1, f_2, a) + P(f_1, f_2, a) = \\
&= p_{fa}(1-p_1)(1-p_2) + p_1^{det} p_1(1-p_2) + p_2^{det}(1-p_1)p_2 + p_{12}^{det} p_1 p_2
\end{aligned}$$

b) Då $p \to 0$ så

$$\begin{aligned}
P(\neg f_1, \neg f_2|a) &\to 1 \\
P(f_1|a) &\to 0 \\
P(f_2|a) &\to 0
\end{aligned}$$

Detta innebär att ju mer osannolikt det är att ett fel uppstår, desto mer sannolikt kommer det felfria fallet vara även om vi får ett larm. Sannolikheten för felfritt system blir då större än sannolikheten för fel trots att vi har ett larm helt oberoende av hur bra testet är. Detta beror på att ett larm nästan alltid är ett falsklarm då fel är mycket osannolika.

Detta innebär att det krävs insikt och viss försiktighet för att använda sannolikheterna för att detektera och isolera fel.

c)

$$\begin{aligned}
P(\neg f_1, \neg f_2|a, f_1 \vee f_2) &= 0 \\
P(f_1|a, f_1 \vee f_2) &= \frac{P(f_1, a)}{P(a|f_1 \vee f_2)} = \frac{p_1^{det} p_1(1-p_2) + p_{12}^{det} p_1 p_2}{P(a|f_1 \vee f_2)} \\
P(f_2|a, f_1 \vee f_2) &= \frac{P(f_2, a)}{P(a|f_1 \vee f_2)} = \frac{p_2^{det}(1-p_1)p_2 + p_{12}^{det} p_1 p_2}{P(a|f_1 \vee f_2)}
\end{aligned}$$

där

$$P(a|f_1 \vee f_2) = \sum_{f_1, f_2} P(f_1, f_2, a|f_1 \vee f_2) = P(f_1, \neg f_2, a) + P(\neg f_1, f_2, a) + P(f_1, f_2, a) =$$
$$= p_1^{det} p_1 (1 - p_2) + p_2^{det} (1 - p_1) p_2 + p_{12}^{det} p_1 p_2$$