Tentamen med lösningsdiskussion

TSFS06 Diagnos och övervakning
5 juni, 2014, kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel: TeFyMa, Beta, Physics Handbook, Reglerteknik (Glad och Ljung), Formelsamling i statistik och signalteori samt miniräknare.

Ansvarig lärare: Erik Frisk

Totalt 40 poäng.
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: 18 poäng
Betyg 4: 25 poäng
Betyg 5: 30 poäng

Uppgift 1. Antag ett linjärt system med två mätsignaler, 1 insignal, samt 3 modellerade fel

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= -\mu\omega + K\,(u + f_u) \\
y_1 &= \varphi + f_1 \\
y_2 &= \omega + f_2
\end{aligned}$$

a) Ange för vart och ett av de 3 felen om de är detekterbara och om de i så fall är starkt detekterbara. (3 poäng)

b) Ange en matris som spänner upp det linjära rummet av konsistensrelationer för en modell

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

Ange dimensionen för det linjära rummet för modellen i a-uppgiften. (2 poäng)

c) Konstruera en residual som isolerar fel f_u från fel f_2. Residualgeneratorn skall skrivas på tillståndsform. (2 poäng)

Lösning.

a) Alla 3 felen är detekterbara där f_1 svagt detekterbart men f_2 och f_3 starkt detekterbara.

b) Raderna i matrisen

$$N_H(p)L(p)$$

spänner upp mängden av konsistensrelationer och dimensionen för modellen i a-uppgiften är 2.

c) En konsistensrelation som är känslig för fel f_u men ej fel f_2 är

$$\ddot{y}_1 + \mu\,\dot{y}_1 - K\,u = 0$$

En residualgenerator kan då skrivas på överföringsfunktionsform

$$r = \frac{1}{(p+\alpha)^3}\begin{pmatrix} p^2 + \mu p & -K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

Då

$$(p+\alpha)^3 = p^3 + 3\alpha p^2 + 3\alpha^2 p + \alpha^3$$

så blir en tillståndsbeskrivning av residualgeneratorn på observerbar kanonisk form

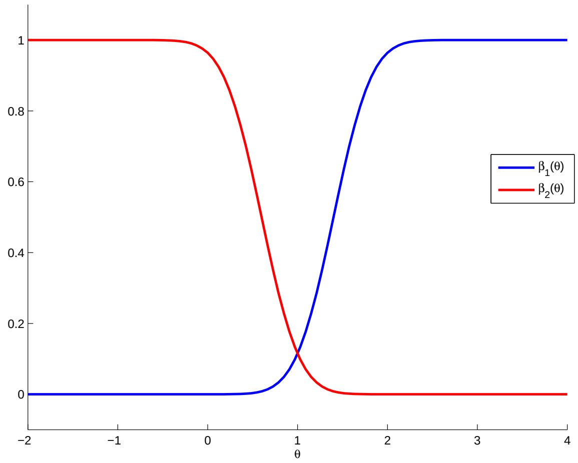
$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \begin{pmatrix} -3\alpha & 1 & 0 \\ -3\alpha^2 & 0 & 1 \\ -\alpha^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \\
r &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} w
\end{aligned}$$

Uppgift 2. Antag att vi studerar test för att övervaka ett fel som är modellerat med en parameter θ där $\theta = 1$ svarar mot det felfria fallet.

a) Antag att en parameterskattare $\hat{\theta} = f(z)$ har konstruerats och $\hat{\theta}$ är normalfördelad med väntevärde θ och varians σ^2. Ange en teststorhet samt beskriv hur tröskeln bestäms. Uttryck tröskeln i fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ för $\mathcal{N}(0,1)$-fördelade stokastiska variabler (2 poäng)

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$$

b) Två test har konstruerats och betecknas $T_1(z_1)$ och $T_2(z_2)$ där z_1 och z_2 är två olika mätsignaler från processen. Deras styrkefunktioner, $\beta_1(\theta)$ respektive $\beta_2(\theta)$, är plottade i figuren nedan.



Jämför och kommentera de två testens prestanda. (2 poäng)

c) Antag att vi kombinerar de två testen till ett nytt på så sätt att det nya testet sägs ha reagerat om T_1 *eller* T_2 reagerat. Antag att den enda osäkerheten i processmodellen som använts vid design av T_1 och T_2 är mätbrus på de två sensorerna.

Ange ett uttryck för den nya teststorhetens styrkefunktion. Om du gör antaganden, motivera dem.

Antag att trösklarna för testen T_1 och T_2 är satta så att falsklarmssannolikheten för respektive test är α. Vad blir falsklarmssannolikheten för det nya kombinerade testet. (2 poäng)

Lösning.

a) Finns flera möjligheter och en lösning är

$$T = |\hat{\theta} - 1|$$

med en tröskel

$$J = -\sigma\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$$

b) Det går ej att säga vilken av de båda testerna som är bäst eftersom det ena testet är bättre på att detektera minskning av variabeln θ och det andra testet är bättre på att detektera ökningar.

c) Uttrycket för det kombinerade testets styrkefunktion är

$$\begin{aligned}
\beta(\theta) &= P(T_1 > J_1 \text{ eller } T_2 > J_2|\theta) = \\
&= P(T_1 > J_1|\theta) + P(T_2 > J_2|\theta) - P(T_1 > J_1 \text{ och } T_2 > J_2|\theta) = \\
&= /\text{testen är oberoende}/ = P(T_1 > J_1|\theta) + P(T_2 > J_2|\theta) - P(T_1 > J_1|\theta)P(T_2 > J_2|\theta) = \\
&= \beta_1(\theta) + \beta_2(\theta) - \beta_1(\theta)\beta_2(\theta)
\end{aligned}$$

Falsklarmssannolikheten för det nya testet blir

$$\beta(1) = \beta_1(1) + \beta_2(1) - \beta_1(1)\beta_2(1) = 2\alpha - \alpha^2$$

Uppgift 3. Antag att 7 residualer konstruerats för att övervaka 4 fel enligt beslutsstrukturen

	f_1	f_2	f_3	f_4
r_1	X	X		
r_2	X		X	X
r_3			X	X
r_4	X	X	X	
r_5	X			X
r_6	X		X	
r_7		X		X

och där fel f_i indikerar fel i komponent C_i, $i = 1, \ldots, 4$.

a) Sammanfatta isolerbarhetsegenskaperna, via en isolerbarhetsmatris, för ett diagnossystem baserat på de 7 residualerna. (2 poäng)

b) Antag att alla 7 residualerna larmat, ange de genererade konflikterna och ange vilka konflikter som är minimala. Skriv konflikterna med logiknotation och låt $OK(C_i)$ och $\neg OK(C_i)$ beteckna att komponent i är hel respektive icke-hel. (2 poäng)

c) Antag larmen från b-uppgiften, beräkna de minimala diagnoserna. (2 poäng)

d) Alla 7 residualerna behövs inte för att uppnå maximal isolerbarhetsprestanda. Ange en minimal delmängd av de 7 residualerna som ger maximal isolerbarhetsprestanda. Motivera minimaliteten. (2 poäng)

Lösning.

a) En isolerbarhetsmatris för de givna 7 residualerna är

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	X			
f_2		X		
f_3			X	
f_4				X

b) De genererade konflikterna blir

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= OK(C_1) \wedge OK(C_2) && \text{(minimal)} \\
\pi_2 &= OK(C_1) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_4) && \\
\pi_3 &= OK(C_3) \wedge OK(C_4) && \text{(minimal)} \\
\pi_4 &= OK(C_1) \wedge OK(C_2) \wedge OK(C_3) && \\
\pi_5 &= OK(C_1) \wedge OK(C_4) && \text{(minimal)} \\
\pi_6 &= OK(C_1) \wedge OK(C_3) && \text{(minimal)} \\
\pi_7 &= OK(C_2) \wedge OK(C_4) && \text{(minimal)}
\end{aligned}$$

c) De minimala diagnoserna är

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= \neg OK(C_1) \wedge \neg OK(C_2) \wedge \neg OK(C_3) \wedge OK(C_4) && \{C_1, C_2, C_3\} \\
\mathcal{D}_2 &= \neg OK(C_1) \wedge OK(C_2) \wedge OK(C_3) \wedge \neg OK(C_4) && \{C_1, C_4\} \\
\mathcal{D}_3 &= OK(C_1) \wedge \neg OK(C_2) \wedge \neg OK(C_3) \wedge \neg OK(C_4) && \{C_2, C_3, C_4\}
\end{aligned}$$

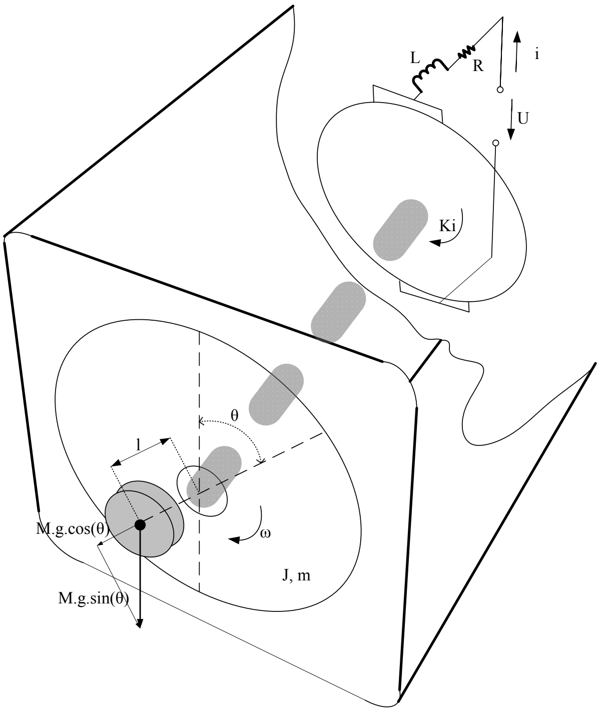
d) Det behövs minst 4 av de 7 residualerna för att få full isolerbarhetsprestanda. Ett sätt att se det är att i en isolerbarhetsmatris notera vilka residualer som ger vilken isolerbarhetsegenskap

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	X	2,5,6	1,5	1,4,6
f_2	7	X	1,7	1,4
f_3	3	2,3,6	X	4,6
f_4	3,7	2,3,6	5,7	X

Här kan man se att residualerna r_3 och r_7 måste vara med. För resterande egenskaper räcker det inte med 1 ytterligare utan det krävs minst två. De två minimala möjligheterna som finns är

$$\{r_1, r_3, r_6, r_7\}, \quad \{r_3, r_4, r_5, r_7\}$$

Uppgift 4. Betrakta en DC-motor med en massa fäst vid den roterande delen enligt figuren nedan.



Motorn styrs genom att en känd spänning u läggs på ingången och mätsignalerna är vinkel θ, vinkelhastighet ω, respektive ström i lindningarna I, dvs.

$$y_1(t) = \theta(t)$$
$$y_2(t) = \omega(t)$$
$$y_3(t) = I(t)$$

En enkel modell av DC-motorn ges av följande ekvationer

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$$
$$L\frac{dI(t)}{dt} = u(t) - K\omega(t) - RI(t),$$
$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = KI(t) - \mu\omega(t) + Mg\ell\sin(\theta(t)),$$

De kända modellkonstanterna är: L och R är induktansen respektive resistansen i lindningarna, K momentkonstant, J tröghetsmoment, M massa, l avstånd från centrumpunkt till massa, g gravitationskonstant, och μ friktionskoefficient.

a) Modellera fel i sensorerna (f_1, f_2, f_3), ökad resistans (f_4) samt ökad friktion (f_5) (2 poäng)

b) Tag fram 4 olika residualer för systemet, ange beslutsstruktur samt isolerbarhetsmatris för residualerna. Det är tillåtet att använda både observatörsmetodik och konsistensrelationer. Specifikt, residualerna skall isolera ökad friktion (f_5) från fel i vinkelmätningen (f_1). Skriv residualgeneratorerna på tillståndsform i möjligaste mån. (6 poäng)

Uppgift 5. Antag att tre residualer konstruerats för att övervaka 3 fel enligt beslutsstrukturen

	f_1	f_2	f_3
r_1	X	X	
r_2	X		X
r_3		X	X

a) Modellera residualernas beteende med ett Bayesianskt nätverk med de 6 binära variablerna $f_1, \ldots, f_3$, samt $r_1, \ldots, r_3$. Använd konventionen att variabeln f_i är sann då fel komponent i är trasig samt r_i är sann då i:te residualen larmat.

Redovisa den riktade grafen som beskriver det Bayesianska nätverket, ange vilka sannolikhetstabeller som behöver specificeras, samt teckna sannolikhetsmodellen

$$P(f_1, f_2, f_3, r_1, r_2, r_3)$$

faktoriserad enligt det Bayesianska nätverket. (3 poäng)

b) Ange hur sannolikheten för fel f_1 beräknas givet att residualerna r_1 och r_2 larmat och r_3 *ej* larmat, dvs. uttryck

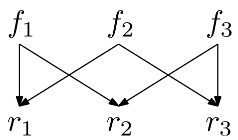
$$P(f_1 | r_1, r_2, \neg r_3)$$

i sannolikhetstabellerna från a-uppgiften. (2 poäng)

c) Antag att noisy-OR, med läckagenod, används för att modellera residualerna. Hur många parametrar kommer modellen då att innehålla? Hur många parametrar skulle den fullständiga, ofaktoriserade, modellen innehålla. (2 poäng)

Lösning.

a) Den riktade grafen för den bayesianska nätverket ges av



och de sannolikhetstabeller som behöver specificeras är de 6 tabellerna för

$$P(f_1),\ P(f_2),\ P(f_3),\ P(r_1|f_1, f_2),\ P(r_2|f_1, f_3),\ P(r_3|f_2, f_3)$$

Den faktoriserade sannolikhetsmodellen blir då

$$P(f_1, f_2, f_3, r_1, r_2, r_3) = P(r_1|f_1, f_2)\, P(r_2|f_1, f_3)\, P(r_3|f_2, f_3) P(f_1)\, P(f_2)\, P(f_3)$$

b) Beräkna

$$\begin{aligned}
P(f_1|r_1, r_2, \neg r_3) = \alpha\, P(f_1, r_1, r_2, \neg r_3) = \\
&= \alpha(P(f_1, f_2, f_3, r_1, r_2, \neg r_3)+ \\
&\quad P(f_1, \neg f_2, f_3, r_1, r_2, \neg r_3)+ \\
&\quad P(f_1, f_2, \neg f_3, r_1, r_2, \neg r_3)+ \\
&\quad P(f_1, \neg f_2, \neg f_3, r_1, r_2, \neg r_3)) = \\
&= \alpha(P(r_1|f_1, f_2)\, P(r_2|f_1, f_3)\, P(\neg r_3|f_2, f_3) P(f_1)\, P(f_2)\, P(f_3)+ \\
&\quad P(r_1|f_1, \neg f_2)\, P(r_2|f_1, f_3)\, P(\neg r_3|\neg f_2, f_3) P(f_1)\, P(\neg f_2)\, P(f_3)+ \\
&\quad P(r_1|f_1, f_2)\, P(r_2|f_1, \neg f_3)\, P(\neg r_3|f_2, \neg f_3) P(f_1)\, P(f_2)\, P(\neg f_3)+ \\
&\quad P(r_1|f_1, \neg f_2)\, P(r_2|f_1, \neg f_3)\, P(\neg r_3|\neg f_2, \neg f_3) P(f_1)\, P(\neg f_2)\, P(\neg f_3))
\end{aligned}$$

För att bestämma normaliseringskonstanten α görs motsvarande beräkning med $\neg f_1$ i uttrycket och summan av de två skall bli 1.

c) Den fullständiga, ofaktoriserade, modellen kräver $2^6 - 1 = 63$. I det Bayesianska nätverket med Noisy-OR noder för residualerna krävs det 12 parametrar. För varje f_i nod krävs 1 parameter. För en Noisy-OR med läckage samt vå föräldranoder krävs 3 parametrar. Detta summerar till 12 parametrar totalt.

Uppgift 6. Att fel ej är starkt detekterbara är inte sällan relaterat till att modellen har rena integratorer, exempelvis är felet f i exemplet

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega \\
\dot{\omega} &= -k\omega + u \\
y &= \varphi + f
\end{aligned}$$

ej starkt detekterbart som kommer av integratorn i systemet (pol i $s = 0$).

Visa att det varken är ett nödvändigt eller tillräckligt villkor att systemet har ren integrator (pol i $s = 0$) för att ett fel ej skall vara starkt detekterbart. (4 poäng)

Tips: Motexempel räcker.

Lösning.
Systemet

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -2\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}$$

har sina båda poler i $s = -\alpha$ och felet är ej starkt detekterbart. Det visar att pol i $s = 0$ ej är nödvändigt för att ett fel skall vara svagt detekterbart.

System

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f \\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

har poler i $s = -\alpha$ samt $s = 0$ och felet är starkt detekterbart. Det visar att pol i $s = 0$ ej är tillräckligt för att felet skall vara svagt detekterbart.