Geometriska analys och designverktyg för olinjära system

Erik Frisk

frisk@isy.liu.se

Föreläsning 1: Introduktion och grundläggande begrepp

Introduktion

- Plan för kursen, föreläsningsplan och projekt.
- Övningsuppgifter.
- Avgränsning i den här kursen, vad handlar den om.

Byt bas och se bättre

- Koppling mellan styrsignal och tillstånd samt tillstånd och utsignal är grundläggande för analys och design av styrsystem.
- Central för förståelse och lösning av bl.a. polplacering via återkoppling, störningsavkoppling, särkoppling via återkoppling, ...
- Nyckelkoncept för detta är observerbarhet och styrbarhet och dess motsvarande uppdelningar av modellekvationerna.
- Ett sätt att närma sig dessa begrepp är olika invarianter.

Här: Följer Isidoris framställning och börjar med linjära system för att illustrera begreppen.

Litet exempel

Antag man vill konstruera en regulator för ett system beskrivet av ekvationerna

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_2^2}{x_1^2} + x_1 u$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2^3}{x_1^3} - x_2 + x_2 u$$

Definiera ett variabelbyte

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}$$

Variabelbytet tydliggör att styrsignalen ej påverkar 2 tillstånd och att z_2 ej är styrbart.

$$\dot{z}_1 = -z_2^2 + z_1 u$$
$$\dot{z}_2 = -z_2$$

A-invarianter

Ett underrum $\mathcal{V}$ sägs vara A-invariant om följande gäller

$$x \in \mathcal{V} \Rightarrow Ax \in \mathcal{V} \quad \text{(skrivs som} \quad A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V})$$

Låt $r = \dim \mathcal{V}$ och betrakta det linjära systemet:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Bas kan väljas så att alla $x \in \mathcal{V}$ kan skrivas som $(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$. I en sådan bas ges systembeskrivningen av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} x + Bu$$

A-invarianter och styrbarhet

Antag vidare att Im $B \subseteq \mathcal{V}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

- Här är det tydligt att tillstånden i x_2 ej är styrbara från u. Inget kan ännu sägas om tillstånden i x_1.
- Antag nu att $\mathcal{V}$ är det minsta underrumet som är A-invariant samt Im $B \subseteq \mathcal{V}$, då är tillstånden i x_1 styrbara från u.
- Från linjär teori vet man att ett sådant $\mathcal{V}$ ges av

$$\mathcal{V} = \text{Inte fuska}$$

En algoritm

Uttrycket

$$\mathcal{V} = \text{Inte fuska}$$

går att generalisera till olinjära system. Här skissas istället en rekursiv algoritm för att räkna ut ett sådant $\mathcal{V}$ som är det minsta A-invarianta $\mathcal{V}$ som även uppfyller Im $B \subseteq \mathcal{V}$.

$$\mathcal{V}_0 = \text{Im } B$$
$$\mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{V}_k + A\mathcal{V}_k$$

Linjärt gäller att för ett $k < n$ så är $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{V}_k$.

Denna typ av algoritm kommer vi se går att direkt generalisera till olinjära system.

A-invarianter och observerbarhet

Antag att $\mathcal{V}$ är A-invariant och att $\mathcal{V} \subseteq \ker C$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x + Bu$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} x$$

- På samma sätt som tidigare ses att tillstånden i x_1 ej är observerbara. Inget kan ännu sägas om tillstånden i x_2.
- Antag nu att $\mathcal{V}$ är det största underrumet som är A-invariant samt $\mathcal{V} \subseteq \ker C$, då är tillstånden i x_2 observerbara i y.
- Från linjär teori vet man att ett sådant $\mathcal{V}$ ges av

$$\mathcal{V} = \text{Inte fuska}$$

En algoritm till

- Sökt: Det största underrumet $\mathcal{V}$ som är A-invariant samt $\mathcal{V} \subseteq \ker C$.
- Ekvivalent: Hitta det minsta duala underrum Ω som är A-invariant samt Im $C \subseteq \Omega$.

På samma sätt som tidigare blir då algoritmen:

$$\Omega_0 = \text{Im } C$$
$$\Omega_{k+1} = \Omega_k + \Omega_k A$$

Linjärt gäller att för ett $k < n$ så är $\Omega = \Omega_{k+1} = \Omega_k$.

Det eftersökta rummet blir då $\mathcal{V} = \Omega^\perp$.

In-ut invarians

För att lösa t.ex. störningsavkoppling, särkopplande återkoppling (non-interacting control) och många residualgenereringsproblem så är det centralt om en styrsignal påverkar en utsignal eller inte.

Slå ihop tidigare villkor på $\mathcal{V}$, dvs.

1. $\mathcal{V}$ är A-invariant
2. Im $B \subseteq \mathcal{V}$
3. $\mathcal{V} \subseteq \ker C$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} x$$

Invarians från u till y är alltså ekvivalent med att det styrbara underrummet är icke observerbart.

Invarians via återkoppling

- Invarianter med alla dessa trevliga egenskaper finns inte “av sig själv”.
- Dock kan man “skapa” invarianter med önskade egenskaper med hjälp av återkoppling.
- Linjärt: $\mathcal{V}$ är en så kallad controlled invariant/(A,B)-invariant om det existerar en återkoppling F så att $\mathcal{V}$ är $(A + BF)$-invariant.
- Dualt, $\mathcal{V}$ är en så kallad conditioned invariant/(C,A)-invariant om det existerar en observatörsförstärkning K så att $\mathcal{V}$ är $(A + KC)$-invariant.

Återkommer senare i kursen till controlled/conditioned-invarianter, deras egenskaper, samt hur de kan användas för design.

Nu mot det olinjära

För att kunna använda liknande tankar även för olinjära system så behöver ett antal begrepp olinjära motsvarigheter, bl.a.

- Basbyte
- Linjära rum, underrum, nollrum, operationer på dessa. . .
- A-invarianter
- Olinjär motsvarighet till exempelvis algoritmen som räknade ut det styrbara underrummet.

Olinjära system

I den klass av olinjära system som betraktas kommer styrsignalen in affint (control affine):

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i$$
$$y_i = h_i(x) \qquad 1 \le i \le p$$

Antas också att alla ingående funktioner är deriverbara.
För det linjära fallet så blir det:

$$f(x) = Ax, \quad g_i(x) = b_i, \quad h_i(x) = c_i x$$

Olinjärt basbyte

Istället för $z = Tx$ så har vi en generell funktion $z = \Phi(x)$ som är inverterbar och deriverbar invers (diffemorfism) [global/lokal].

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \xrightarrow{z=Tx} \quad \dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$$

motsvarande i olinjära system blir då

$$\dot{x} = f(x)+g(x)u \quad \xrightarrow{z=\Phi(x)} \quad \dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(x)+g(x)u) = \bar{f}(z)+\bar{g}(z)u$$

där

$$\bar{f}(z) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} ; \quad \bar{g}(z) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

Nu mot det olinjära

För att kunna använda liknande tankar även för olinjära system så behöver ett antal begrepp olinjära motsvarigheter, bl.a.

- Basbyte

$\Rightarrow$ Linjära rum, underrum, nollrum, operationer på dessa...

- A-invarianter
- Olinjär motsvarighet till exempelvis algoritmen som räknade ut det styrbara underrummet.

Vektorer, ko-vektorer och vektorfält

- f är en vektorvärd funktion och för varje x är $f(x)$ en vektor i $\mathbb{R}^n$. Funktionen f kallas därför för ett vektorfält.
- Mjuka vektorfält
- Radvektorer (isf. kolumnvektorer) kallas på samma sätt för ko-vektorer.
- En speciell ko-vektor som är användbar är differentialen av en funktion $\lambda(x)$

$$d\lambda(x) = [\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \ \ldots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n}]$$

- En ko-vektor $\omega(x)$ för vilken det existerar ett $\lambda(x)$ så att $d\lambda(x) = \omega(x)$ kallas en exakt differential.

Operationer: Lie-derivata

Derivatan av den skalära funktionen $g(x)$ längs med vektorfältet f kallas Lie-derivatan

$$L_f g(x) =< dg(x), f(x) >= \frac{\partial g}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i(x)$$

Händig notation som dyker upp i många sammanhang:

$$\dot{x} = f(x) \qquad \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = L_f h(x)$$

$$y = h(x) \qquad \ddot{y} = L_f(L_f h(x)) = L_f^2 h(x)$$

Finns en motsvarighet för ko-vektorer också:

$$L_f \omega(x) = f^T(x) \left(\frac{\partial \omega^T}{\partial x}\right)^T + \omega(x) \frac{\partial f}{\partial x}$$

(övningsuppgift illustrerar varför den ser ut som den gör)

Operationer: Lie-produkt

Operationen Lie-produkt/klammer (eng. Lie-product/bracket) definieras enligt:

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

Jobbar man med denna olinjära system så dyker denna operator upp på många ställen. Så, vad betyder den?

Först, vad svarar den mot i linjära system?

$$[Ax, v](x) = \frac{\partial v}{\partial x} Ax - \frac{\partial}{\partial x}\{Ax\} v = -Av$$

Mer egenskaper som förklarar denna operations egenskaper kommer.

Distributioner

En generalisering av ett linjärt vektorrum som kallas distribution (har inget att göra med distributionerna i transformteorin).

- Givet vektorfälten $f_1, \ldots, f_d$, så för varje $x \in \mathcal{U}$ så spänner $f_1(x), \ldots, f_d(x)$ upp ett linjärt vektorrum.
- Distributionen $\Delta(x) =$ span $\{f_1(x), \ldots, f_d(x)\}$ är alltså ett vektorrum som beror av x.

$$\Delta(x) = \text{span}\ \{\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}\}$$

- Dimension hos Δ kan givetvis variera med x, exempelvis är $\dim \Delta(x) = 1$ då $x_2 = 1$ och $\dim \Delta(x) = 2$ förövrigt.

Singulära och icke-singulära distributioner

- Regular point, singulär/icke-singulär distribution
- Om distributionen har samma dimension r för hela definitionsmängden $\mathcal{U}$ så kan man skriva $\dim \Delta = r$.
- (Lemma 1.3.1) Δ är en mjuk distribution och x^0 är en regular point, dim $\Delta = d$ så finns en omgivning $\mathcal{U}$ av x^0 och oberoende funktioner (i alla $x \in \mathcal{U}$) $f_1(x), \ldots, f_d(x)$ så att för alla $x \in \mathcal{U}$

$$\Delta(x) = \text{span}\ \{f_1(x), \ldots, f_d(x)\}$$

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i(x) f_i(x)$$

Singulära och icke-singulära distributioner, annihilator

- Operationerna $\Delta_1 + \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2$ och relationen $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ definieras punktvis.
- Är Δ_i mjuka så är $\Delta_1 + \Delta_2$ också mjuk men ej nödvändigtvis $\Delta_1 \cap \Delta_2$
- I omgivningen av en regular point så är den dock mjuk.
- Annihilator, $\Delta^\perp$, också mjuk runt en regular point

Nu mot det olinjära

För att kunna använda liknande tankar även för olinjära system så behöver ett antal begrepp olinjära motsvarigheter, bl.a.

- Basbyte
- Linjära rum, underrum, nollrum, operationer på dessa...

$\Rightarrow$ A-invarianter

- Olinjär motsvarighet till exempelvis algoritmen som räknade ut det styrbara underrummet.

Invarianta distribution

En olinjär motsvarighet till A-invariant kan nu definieras med hjälp av Lie-produkten. En distribution Δ sägs vara f-invariant om

$$\tau \in \Delta \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta$$

Jämför A-invarians för linjära vektorrum

$$v \in \mathcal{V} \Rightarrow Av \in \mathcal{V}$$

Omodelbart att den olinjära definitionen är konsistent med den linjära i fallet att $\Delta = \text{Im } A$.

Dock räcker inte invarians för att kunna göra de uppdelningar av olinjära modeller som gjordes i det linjära fallet, det krävs ytterligare en egenskap hos distributionen, involutivitet.

Involutiva distributioner

En klass av distributioner som ska visa sig användbara är så kallade involutiva distributioner.
En distribution Δ som är sluten under lie-produkt kallas involutiv:

$$\tau_1 \in \Delta, \tau_2 \in \Delta \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta$$

Om Δ är icke-singulär så gäller att $\Delta = \text{span}\,\{f_1, \ldots, f_d\}$ pch Δ är involutiv omm

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \text{ för alla } 1 \le i, j \le d$$

vilket ekvivalent kan skrivas som ett rang-villkor

$$\text{rank}\,(f_1(x), \ldots, f_d(x)) = \text{rank}\,(f_1(x), \ldots, f_d(x), [f_i(x), f_j(x)])$$

för alla $x \in \mathcal{U}$ och $1 \le i, j \le d$.

Involutiva distributioner

- Att en distribution är involutiv är ganska speciellt
- En 1-dimensionell distribution är alltid involutiv
- Ett linjärt vektorrum är alltid involutivt
- Jämför att en slumpvis mängd med ekvationer skulle vara linjärt beroende.
- Om dock Δ är involutivt, eller är det per konstruktion, så har det intressanta egenskaper. Speciellt när det gäller att konstruera variabeltransformationer med speciella egenskaper.
- Jämför till exempel variabelbytet som gjordes i det linjära exemplet för att dela upp systemet i observerbara/styrbara delar.

Δ involutiv

Om vi nu har en distribution som är involutiv, då finns det en variabeltransformation $z = \Phi(x)$ så att i de nya koordinaterna

$$\tau(z) \in \Delta \Leftrightarrow \tau(z) = (\tau_1(z), \dots, \tau_d(z), 0, \dots, 0)$$

Jämför med det linjära variabelbytet tidigare.

Visa ena hållet samt konstruktion av variabelbytet via lösandet av en speciell typ av partiell differentialekvation.

Uppdelning av olinjära system (Lemma 1.6.1)

Låt Δ vara icke-singulär, dimesion d, f-invariant, då gäller att det existerar en transformation $z = \Phi(x)$ så att $f(x)$ i det nya koordinatsystemet ges av

$$\bar{f}(z) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(z_1, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_n) \\ \dots \\ \bar{f}_d(z_1, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_n) \\ \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_n) \\ \dots \\ \bar{f}_n(z_{d+1}, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

Uppdelning av olinjära system

Antag den olinjära differentialekvationen

$$\dot{x} = f(x)$$

och låt Δ vara icke-sing., dimension d, samt involutiv, då gäller att det finns en transformation $z = \Phi(x)$. Med

$$\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d), \quad \zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$$

så blir systembeskrivningen i de nya koordinaterna

$$\dot{\zeta}_1 = \bar{f}_1(\zeta_1, \zeta_2)$$
$$\dot{\zeta}_2 = \bar{f}_2(\zeta_2)$$

(jmf. det linjära fallet)

Frobenius Teorem

- Sökta variabeltransformationer kan inte sällan specificeras som lösningen till en partiell differentialekvation.
- Med hjälp av involutiva distributioner ska vi nu presentera nödvändiga och tillräckliga lösbarhetsvillkor för en speciell typ av PDE.
- Samtidigt skissas en “algoritm” för att lösa dem.

Antag $\Delta = \text{span}\ \{f_1, \ldots, f_d\} \subseteq \mathbb{R}^n$ är en d-dimensionell icke-singulär distribution och att vi söker funktioner $\lambda(x)$ som löser:

$$d\lambda f_i = 0, \text{ för } 1 \leq i \leq d$$

Eftersom $\Delta^\perp$ har dimension $n-d$ kan man vara intresserad av $n-d$ oberoende lösningar om de existerar.

Frobenius

Janne