Geometriska analys och designverktyg för olinjära system

Erik Frisk

frisk@isy.liu.se

Föreläsning 2a: Uppdelning av olinjära system, Frobenius, involutivitet, styrbarhet, algoritmer

Introduktion

- Förra gången, tittade på hur man kunde analysera styrbarhet och observerbarhet via distributioner.
- Krävde en hel del definitioner.
- Idag: hur räknar man ut dessa distributioner?
- Involverar lösning av en central PDE: Frobenius teorem.
- Presenterar endast styrbarhet, observerbarhet helt duala resultat

Konstruktion av variabelbyte

1. Räkna fram en distribution med väl valda egenskaper. Hur och vilka egenskaper man är ute efter beror på syftet med variabelbytet. Exempelvis för att analysera linjär styrbarhet:

$$\mathcal{V}_0 = \text{Im } B, \quad \mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{V}_k + A\mathcal{V}_k$$

2. Givet en distribution $\Delta(x)$ med dimension d som spänns upp av $f_1(x), \ldots, f_d(x)$, konstruera variabelbytet enligt

$$z = \Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_d(x), \Phi_{d+1}(x), \ldots, \Phi_n(x))$$

där $\Phi_{d+1}(x), \ldots, \Phi_n(x)$ är $n-d$ oberoende lösningar till pde:n

$$1 \leq j \leq d, d+1 \leq i \leq n : \frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x} f_j(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{span } \{d\Phi_{d+1}, \ldots, d\Phi_n\} = \Delta^\perp$$

Lösning av denna speciella PDE

Låt $\Delta(x) = \text{span } \{f_1(x), \ldots, f_d(x)\}$ vare en given distribution.

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(f_1(x), \ldots, f_d(x)) = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} F(x) = 0$$

Vad är nu villkoren för att ett sådant här system av första ordningens partiella differentialekvationer verkligen ska ha $n-d$ oberoende lösningar?

Svaret ges av Frobenius teorem: $n-d$ oberoende lösningar omm $\Delta(x)$ är icke-singulär och involutiv.

Geometriska tolkningar och en procedur för att faktiskt lösa diff-ekvationerna ges nu av Janne.

Frobenius, Lie-produkter och geometri

ca 40-45 min.

Uppdelning av olinjära system

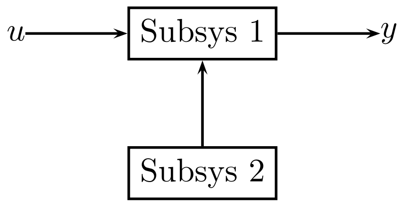
Antag vi har en distribution $\Delta(x)$ som är icke-singulär och involutiv,

- invariant under $f, g_1, \ldots, g_m$
- span $g_1, \ldots, g_m \subseteq \Delta$

då visade jag förra gången att det fanns ett variabelbyte $z = \Phi(x)$ så att:

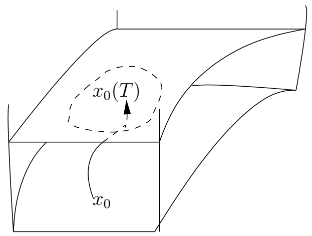
$$\dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2) + \sum_{i=1}^{m} g_{1i}(z_1, z_2)u_i$$

$$\dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2)$$



Dimensionen på subsystem 1 är d. Intressant att minimera d.

Geometrisk tolkning av uppdelningen



Starta i $x(0) = x_0$ och beteckna $x_0(T)$ punkten vi hamnar i om $u = 0$.

Anta vi inte hamnar utan för definitionsområdet U för transformationen. Icke styrbar trajectorian bär med sig ‘ytopr som vi kan styra till.

Ytan vi kan styra till är då en delmängd av ytan (av dimension d) som beskrivs av $S_x = \{x' \in U : z_2(x') = z_2(x)\}$

Hur “tunn” kan vi göra ytan?

Nåbarhet för olinjära system

En distribution Δ med egenskaperna

- Δ icke-singulär och involutiv
- Δ invariant under $f, g_1, \ldots, g_m$
- span $g_1, \ldots, g_m \subseteq \Delta$

var intressant för att studera vilka punkter man kunde styra tillståndet till. Resulterade i en delmängd av en “skiva” av dimension d som man kunde styra tillståndet till.

Speciellt intressant blir det om man studerade den minsta distributionen, dvs. den “tunnaste skivan”.

Ej självklart att det finns ett sådant element.
(Lemma 1.8.1): Snittet av alla sådana distributioner ger det minsta elementet (och mjuk pga. Δ är det).

Minsta distributionen

En distribution Δ med egenskaperna

- Δ icke-singulär och involutiv
- Δ invariant under $f, g_1, \ldots, g_m$
- span $g_1, \ldots, g_m \subseteq \Delta$
- Minimal

En beteckning som används i boken är:
Den minsta distributionen som innehåller distributionen Γ och är invariant under vektorfälten $\tau_1, \ldots, \tau_q$ betecknas

$$< \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma >$$

Den är helt klart intressant för vårt fall med styrbarhetsundersökning.

Algoritmer för att beräkna $< \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma >$

En algoritm för att beräkna $< \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma >$ kan man nu tänka sig skriva som:

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k + \sum_{i=1}^{q} [\tau_i, \Delta_k]$$

Nu är det läge att analysera lite hur/varför/när denna algoritm ger det svar vi är ute efter.

Beräknar algoritmen det vi vill?

Enkelt att visa [gör det] (Lemma 1.8.2) att

- $\Delta_k \subset < \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma >$
- Om det finns ett k så att $\Delta_{k+1} = \Delta_k$, låt k^* vara det minsta sånt k. Då gäller att $\Delta_{k^*} = < \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma >$.

Alltså, om algoritmen stannar så tycks den beräkna precis det vi vill. Gott.

Räcker det? Nej, förutom att algoritmen ska stanna så för att vi ska kunna använda distributionen för ett variabelbyte så kräver vi även att den ska vara icke-singulär och involutiv.

Stannar algoritmen?

Vad finns det för skäl att tro att den faktiskt stannar? Ett enkelt tillräckligt villkor för att den ska stanna ges av följande resonemang.

Per definition så gäller att $< \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma > \subset \mathbb{R}^n$.

Antag att alla Δ_k i iterationen är icke-singulära

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k + \sum_{i=1}^{q} [\tau_i, \Delta_k]$$

då gäller att

$$\dim \Delta_k \leq \dim \Delta_{k+1} \leq n$$

och det måste därmed finnas ett k så att algoritmen stannar.

Om det finns singulära Δ_k

Om det finns singulära Δ_k så är ju inte dimension ens definierat och inga garantier kan fås på att algoritmen stannar.

Ett svagare resultat kan skrivas ned (Lemma 1.8.3) i det fallet

$$\Delta_{n-1}(x) =< \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma > (x)$$

för en öppen och [dense] delmängd av definitionsmängden (eller så definierar man om definitionsmängden)

Dvs. kör man algoritmen n steg så gäller likhet ej i hela definitionsmängden utan i en delmängd.

Ge exempel om tid medger detta.

När ger algoritmen involutiva distributioner

Nej, för att vi ska kunna använda distributionen för ett variabelbyte så kräver vi att den ska vara icke-singulär och involutiv. Annars har PDE:n inte $n-d$ oberoende lösningar.

(Lemma 1.8.6): Antag att Γ spänns upp av vissa τ_i och att Δ_{n-1} är icke-singulär, då gäller att

$$\Delta_{n-1} =< \tau_1, \ldots, \tau_q | \Gamma >$$

Tekniskt resonemang som jag ej föreläser, resultatet är dock lättolkat

Vad ger detta resultat i vårt styrbarhetsanalys?

- Δ icke-singulär och involutiv
- Δ invariant under $f, g_1, \ldots, g_m$
- $\Gamma =$ span $g_1, \ldots, g_m \subseteq \Delta$
- Minimal

dvs. vi söker

$$< f_1, g_1, \ldots, g_q | \Gamma >$$

Här är ju villkoret för involutivitet direkt uppfyllt och alltså gäller att om Δ_{n-1} är icke-singulär så gäller att

$$\Delta_{n-1} =< f_1, g_1, \ldots, g_q | \Gamma >$$

och Δ_{n-1} är involutiv, dvs. klar att använda för att definiera ett variabelbyte. Trevligt!