Geometriska analys och designverktyg för olinjära system

Erik Frisk

frisk@isy.liu.se

Föreläsning 3b: Återkoppling och tillämpning på controlled invariants: störningsavkopplande reglering

Statisk återkoppling

Systemen som betraktas är på formen

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

En generell, **statisk**, tillståndsåterkoppling är då på formen

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

där v är en referenssignal eller liknande.

Det återkopplade systemet blir då

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(\alpha(x) + \beta(x)v) = \overbrace{f(x) + g(x)\alpha(x)}^{\tilde{f}(x)} + \overbrace{g(x)\beta(x)}^{\tilde{g}(x)}\, v$$

dvs. ett nytt system som är affint i styrsignalen v.

Invarianter och återkoppling

- Tidigare i kursen har vi, relativt ingående, studerat invarianta distributioner med olika egenskaper.
- Hur påverkas dessa av en statisk återkoppling?
- Mer speciellt, kan vi med klurigt vald återkoppling "skapa" distributioner som inte var invarianta från början?
- Detta är grunden till det som kallas controlled och conditioned invariants.
- Kallas ibland (A, B)-invarianter resp. (C, A) invarianter men är inte helt lämpliga namn i det olinjära fallet.

Styrda invarianter = Controlled invariants

För att hitta styrbara delar av ett system

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

så har vi tidigare intresserat oss för distributioner med invarians egenskaperna

- Δ är invariant under vektorfälten f och g, dvs.

$$[f, \Delta] \subseteq \Delta, \quad [g_i, \Delta] \subseteq \Delta 1 \leq i \leq m$$

- En naturlig definition blir då: Δ är en styrd invariant om det existerar en återkoppling $u = \alpha(x) + \beta(x)u$ sådan att

$$[\tilde{f}, \Delta] \subseteq \Delta, \quad [\tilde{g}_i, \Delta] \subseteq \Delta, 1 \leq i \leq m$$

där $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha(x)g(x)$ och $\tilde{g}(x) = g(x)\beta(x)$.

Styrda invarianter: ett problem och en lösning

- Tanken är att hitta en styrd invariant distribution för att hitta sin regulator.
- Ett problem uppstår då: det blir lite bakvänt att behöva (den så hett eftersökta) regulatorn för att specificera distributionen.
- Vi vill alltså karakterisera styrda invarianter **utan** att behöva nämna/befatta oss med regulatorn. Vi är endast intresserade av om det existerar någon.
- Att räkna ut regulatorn kan vara ett senare problem.

Börjar som vanligt med det linjära fallet för att få lite känsla för problemet.

Styrda invarianter: linjära fallet

För ett linjärt system

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

med regulator $u = Kx$ så blir det slutna systemet

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Antag ett element $v \in \mathcal{V}$, då gäller att

$$(A + BK)v = Av + BKv = \overbrace{v_0 + v_\perp}^{v_0 \in \mathcal{V}, v_\perp \in \mathcal{V}^\perp} + BKv$$

dvs, för att vi ska vara kvar i $\mathcal{V}$ så måste BKv kompensera bort $v_\perp$. Detta leder oss till en möjlig definition

$$A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \text{Im } B$$

Bevisa i det linjära fallet

Bevisa att $\mathcal{V}$ är en styrd invariant om och endast om

$$A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \text{Im } B$$

Notera att beviset också ger en regulator (ej nödvändigtvis stabiliserande).

Motsvarande resultat för det olinjära fallet

För systemet

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

så gäller att Δ är en styrd invariant om det existerar en återkoppling $u = \alpha(x) + \beta(x)u$ sådan att

$$[\tilde{f}, \Delta] \subseteq \Delta, \quad [\tilde{g}, \Delta] \subseteq \Delta$$

där $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha(x)g(x)$ och $\tilde{g}(x) = g(x)\beta(x)$

Lemma 6.2.1 ger då att (jmf med det linjära $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \text{Im } B$) Δ är en styrd invariant omm

$$[f, \Delta] \subseteq \Delta + \mathcal{G}, \quad [g_i, \Delta] \subseteq \Delta + \mathcal{G}$$

där $\mathcal{G} = \text{span } \{g_1, \ldots, g_m\}$. Ingen regulator!

Beräkning av regulator

- I det linjära fallet är det inte svårt att hitta en regulator givet en styrd invariant.
- I det olinjära fallet, beräkning av regulator, dvs funktionerna $\alpha(x)$, $\beta(x)$ skissas i Lemma 6.2.1 och lite framåt. Dock kräver det lösning av en generell partiell differentialekvation. Svårt! Ej en sådan "enkel" som vi studerat tidigare.
- Vi kommer nu titta på en speciell applikation, där det visar sig enkelt att faktiskt beräkna $\alpha(x)$, $\beta(x)$ (via linjära ekvationssystem faktiskt).

Applikationsexempel: störningsavkopplande reglering

Antag ett system med flera styrsignaler och en störning w:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i + p(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Hitta, om det är möjligt, en statisk återkoppling $\alpha(x)$, $\beta(x)$, så att w ej påverkar utsignalen y i det slutna systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + \sum_{i=1}^{m} (g(x)\beta(x))_i v_i + p(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Ett specialfall av så kallad "non-interacting control" eller diagonaliserande reglering, dvs. att omvandla ett MIMO styrproblem till m stycken SISO-problem.

Vi kan nu säga saker direkt

Med vår kunskap så kan vi säga att problemet har en lösning om det finns en distribution Δ:

- invariant under $\tilde{f}$, $\tilde{g}$
- span $\{p\} \subseteq \Delta$
- $\Delta \subseteq \ker dh$
- involutiv

dvs. vi söker en styrd invariant Δ där $p \in \Delta \subseteq \ker dh$.

Om vi då söker den **största** styrda invarianten i $\ker dh$ så har problemet en lösning om **och endast om**

$$p \in \Delta$$

Om lösning finns, vad betyder det nu igen?

Om Δ dessutom är icke-singulär så kan det slutna systemet (lokalt) beskrivas av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \tilde{f}_1(x_1, x_2) + \tilde{g}_1(x_1, x_2)v + p(x_1, x_2)w \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}_2(x_2) + \tilde{g}_2(x_2)v \\ y &= h(x_2)\end{aligned}$$

Lösningen konstruerades alltså genom att göra, via återkoppling, de delar av systemet som är styrbara från w, icke-observerbara.

Hur beräknar vi den största?

Hur beräknar man då den **största** styrda invarianten i $\ker dh$?

Att det finns ett största element är lätt att övertyga sig om. Om Δ_1 och Δ_2 är styrda invarianter i $\ker dh$ så är även $\Delta_1 + \Delta_2$ det. Dvs. det största elementet är summan av alla element.

Följande iteration beräknar faktiskt just ett sådant Δ.

$$\Omega_0 = \text{span}\,\{dh\}$$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k + L_f(\Omega_k \cap G^\perp) + \sum_{i=1}^{m} L_{g_i}(\Omega_k \cap G^\perp)$$

Bevisa detta (Lemma 6.3.1): $\Delta = \Omega_k^\perp$.

Sid 322-323 innehåller lite matnyttig text om hur man kan utföra dessa iterationer i praktiken.

Hur var det med involutiviteten då?

När är resultatet också involutivt?

Lemma 6.3.3 säger att om algoritmen avslutar med Δ^*, att Δ^* och $\Delta^* + \mathcal{G}$ är icke-singulära så är även Δ^* involutiv.

Nu när vi har distributionen Δ^*, hur beräknar vi återkopplingen $\alpha(x)$, $\beta(x)$? I det allmänna fallet behövde vi lösa en generell PDE, detta gäller inte längre.

Proposition 6.3.5 säger hur man kan hitta $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ genom att lösa linjära (x-beroende) algebraiska ekvationer. (ej föreläsningsbart, läs själva)

Slutsats

Intressant hur man kan säga starka resultat (omm) på ett väldigt enkelt sätt (via de begrepp som introducerats) och som trots allt är någorlunda algoritmiskt.

(DPP) Givet ett system

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i + p(x)w$$
$$y = h(x)$$

hitta en styrlag $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ sådan att störningen w ej påverkar y. Lemma 7.2.1: Detta problem har en lösning om och endast om

$$p \in \Delta$$

där Δ är den största styrda invarianten i $\ker\{dh\}$.