Geometriska analys och designverktyg för olinjära system

Erik Frisk

frisk@isy.liu.se

Föreläsning 4: Tillämpning på conditioned invariants: Residualgenerering för diagnos

Kort återblick

Förra gången tittade vi på så kallade styrda invarianter och en tillämpning på dessa. Linjärt är $\mathcal{V}$ en styrd invariant om och endast om det existerar en återkoppling K så att

$$(A + KC)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$$

dvs. vi kunde med återkopplingen göra $\mathcal{V}$ till en $(A - KC)$-invariant.

Detta kunde visa sig vara ekvivalent med

$$A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \text{Im } B$$

dvs. ett uttryck utan ett explicit uttryck för regulatorförstärkningen K.

Motsvarande fanns för det olinjära fallet.

Dualitet: conditioned invariants ((C, A)-invariant)

Där det finns ett resultat för styrbarhet brukar det lura ett dualt resultat för observerbarhet. Så också här: conditioned invariants (jag har inte lyckats hitta någon bra svensk översättning).

I det linjära fallet: $\mathcal{V}$ är en conditioned invariant om och endast om det existerar en observatörsförstärkning K så att

$$(A - KC)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$$

vilket kan visas vara ekvivalent med

$$A(\mathcal{V} \cap \ker C) \subseteq \mathcal{V}$$

som återigen är ett uttryck utan uttrycklig observatörsförstärkning.

Conditioned invariant: olinjär definition

Om definitionen i det linjära fallet är

$$A(\mathcal{V} \cap \ker C) \subseteq \mathcal{V}$$

så är det ingen vild gissning att gissa den olinjära motsvarigheten är

$$[f, \Delta \cap \ker dh] \subseteq \Delta$$
$$[g_i, \Delta \cap \ker dh] \subseteq \Delta$$

Frågan är nu vad man kan göra med dessa invarianter.

Illustrerar med residualgenereringsproblemet (eller mer generellt vilka tillstånd man kan observera trots en okänd störning)

Residualgenereringsproblemet

Antag en olinjär systembeskrivning

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)w + l(x)f$$
$$y = h(x)$$

där w är okända störningar (inkl. fel vi vill avkoppla) och f är felen vi vill detektera.

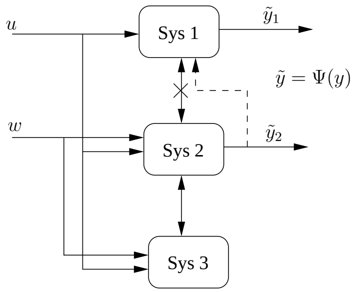
Hitta en residualgenerator, dvs ett olinjärt filter

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, y) + \hat{g}(\hat{x}, y)u$$
$$r = \hat{h}(\hat{x}, y)$$

så att r reagerar på förändringar i f, men ej i w. (hattarna har med observatörer att göra)

Uppdelning med hjälp av cond. invariants

- Δ är en conditioned invariant, involutiv och icke-singulär
- span $\{p\} \subseteq \Delta$
- samt att $\exists \Psi_1$ så att $\Delta^\perp \cap$ span $\{dh\} =$ span $\{d(\Psi_1 \circ h)\}$



Märk skillnad mot direkt invarians.

Metod: Leta efter den minsta cond. invariant som innehåller span $\{p\}$ och kolla om $l \in \Delta$.

Conditioned invariants och residualgenerering

- Δ är en conditioned invariant, involutiv och icke-singulär
- span $\{p\} \subseteq \Delta$
- samt att $\exists \Psi_1$ så att $\Delta^\perp \cap$ span $\{dh\} =$ span $\{d(\Psi_1 \circ h)\}$

då finns ett (lokalt) variabelbyte (och uttransformation) så att:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3)u + p_2(x1, x_2, x_3)w$$
$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u + p_3(x1, x_2, x_3)w$$
$$\tilde{y}_1 = h_1(x_1)$$
$$\tilde{y}_2 = x_2$$

om $l \notin \Delta$ så kommer felet också påverka delsystem 1 och vi kan konstruera en observatör för x_1 för att detektera felet.

≈ Isidoris resultat för residualgenerering

Det olinjära residualgenereringsproblemet har en (lokal) lösning om och endast om det existerar en distribution Δ

- Δ är conditioned invariant.
- involutiv och icke-singulära villkor.
- span $p \subseteq \Delta$.
- $\exists \Psi_1$ så att $\Delta^\perp \cap$ span $\{dh\} =$ span $\{d(\Psi_1 \circ h)\}$
- $l \notin \Delta$.

Två frågor kvar: Hur beräknar man ett sådant (minsta) Δ och vad betyder det där extra villkoret?

Isidoris artikel säger inte riktigt detta, byt ut conditioned invariant mot vad som kallas observability co-distribution. Jag hänvisar till artikeln och en mycket treblig liten uppgift jag knåpat ihop för det linjära fallet som illustrerar vad skillnaden är.

Vad betyder det ytterligare villkoret?

Vad betyder villkoret att det existerar en funktion $\Psi_1(y)$ så att

$$\Delta^\perp \cap \text{span}\,\{dh\} = \text{span}\,\{d(\Psi_1 \circ h)\}$$

I det linjära fallet så ser man att det alltid existerar ett sådant Ψ_1. Ses genom att

$$\Delta^\perp \cap \text{span}\,\{dh\} \subseteq \text{Im}\,C$$

samt att

$$\text{span}\,\{d(\Psi_1 \circ h)\} = \Psi_1 C$$

vilket ger att man alltid kan hitta en matrix Ψ_1 som uppfyller villkoret.

Algoritm och involutivitet

Algoritm för att räkna ut conditioned invariant Δ som innehåller span $\{p\}$ ges (som vanligt) av en iteration

$$\Delta_0 = \text{span}\,\{p\}$$

$$\Delta_{k+1} = \Delta_k + \sum_{i=0}^{m} [g_i, \Delta_k \cap \ker\{dh\}]$$

(jämför definitionen av conditioned invariant)

$$[g_i, \Delta \cap \ker dh] \subseteq \Delta$$

Under diverse icke-singularitetsvillkor så kommer Δ att vara involutiv genom sin konstruktion.

Sammanställning: Konstruktion av transformationer

Tanken är alltså att givet:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)w + l(x)f$$
$$y = h(x)$$

hitta en tillståndstransformation $z = \Phi(x)$ och en utsignalstransformation $\tilde{y} = \Psi(y)$ så att det transformerade systemet blir:

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2) + g_1(z_1, z_2)u$$
$$\dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2, z_3) + g_2(z_1, z_2, z_3)u + p_2(z1, z_2, z_3)w$$
$$\dot{z}_3 = f_3(z_1, z_2, z_3) + g_3(z_1, z_2, z_3)u + p_3(z1, z_2, z_3)w$$
$$\tilde{y}_1 = h_1(z_1)$$
$$\tilde{y}_2 = z_2$$

Sammanställning: Konstruktion av transformationer

Detta görs genom att först hitta en conditioned invariant Δ som innehåller p.

1. Lös PDE så att span $\{d\Phi_1(x)\} = \Delta^\perp$ (Frobenius).
2. Hitta en funktion $\Psi_1(x) : \Delta^\perp \cap \text{span}\,\{dh\} = \text{span}\,\{d(\Psi_1 \circ h)\}$
3. Konstruera utsignalstransformationen genom att fylla ut med H_2 så att (går alltid)

$$\tilde{y} = \Psi(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1(y) \\ H_2 y \end{pmatrix}$$

4. Konstruera tillståndstransformationen via $\Phi_3(x)$:

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ H_2 h(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix}$$

Skillnad mot de Persis/Isidori

I de Persis/Isidori betraktas inte enbart conditioned invariants, utan så kallade observability (co-)distributions.
Jag rekommenderar två av uppgifterna i uppgiftssamlingen som illustrerar skillnaderna mellan dessa och vad det extra steget i de Persis/Isidoris artikel är bra för.

Exempel: punktmassemodell av satellit

Modellen ges av ekvationerna (x_1, x_3) polära koordinater för satelliten.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_4^2(t) - \theta_1\frac{1}{x_1^2(t)} + \theta_2 u_1(t) + d(t)\\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t)\\
\dot{x}_4(t) &= -2\frac{x_2(t)x_4(t)}{x_1(t)} + \theta_2\frac{u_2(t)}{x_1(t)} + \theta_2\frac{f(t)}{x_1(t)}\\
y_1(t) &= x_1(t)\\
y_2(t) &= x_3(t)\\
y_3(t) &= x_4(t)
\end{aligned}
$$

Exempel, forts.

Först, kör algoritmen så stannar den på

$$\Delta = \text{span}\ \{(0,1,0,0), (1,0,0,-2\frac{x_4}{x_1})\}$$

Steg 1: Lös span $\{d\Phi_1\} = \Delta^\perp$

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1^2 x_4 \end{pmatrix}$$

Steg 2: Nästa steg är att lösa "extra villkoret", dvs hitta en funktion Ψ_1 så att

$$\Delta^\perp \cap \text{span}\ \{dh\} = \text{span}\ \{d(\Psi_1 \circ h)\}$$

Exempel, forts.: utsignalstransformationen

Steg 2 (forts): Man kan lätt visa att i det här fallet är $\Delta^\perp \cap \text{span}\ \{dh\} = \Delta^\perp$ vilket ger att lösningen av en funktion

$$\Psi_1 \circ h(x) = \Phi_1(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1^2 x_4 \end{bmatrix}$$

Ett sådant Ψ_1 ges alltså av

$$\Psi_1(y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 y_3 \end{pmatrix}$$

Exempel, forts.

Steg 3: Fyll ut med H_2 så att utsignaltransformationen blir mjuk, fin och inverterbar

$$\tilde{y} = \Psi(y) = \begin{pmatrix} \Psi_1(y) \\ H_2 y \end{pmatrix}$$

Utfyllnad ges direkt av y_1, dvs. hela transformationen blir

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^2 y_3 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Exempel forts.

Tillståndstransformationen gavs av

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ H_2 h(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1^2 x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

där $\Phi_3 = x_2$ fyller ut till en mjuk inverterbar transformation.

Exempel: transformerat system

Utför man nu transformationerna så får man:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{11} &= \frac{z_{12}}{z_2^2} \\
\dot{z}_{12} &= \theta_2 z_2 u_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 + 0w \\
\dot{z}_3 &= \frac{z_{12}^2}{z_2^3} - \frac{\theta_1}{z_2^2} + \theta_2 u_1 + w \\
\tilde{y}_{11} &= z_{11} \\
\tilde{y}_{12} &= z_{12} \\
\tilde{y}_2 &= z_2
\end{aligned}$$

Jämför med

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= f_1(z_1, z_2) + g_1(z_1, z_2)u \\
\dot{z}_2 &= f_2(z_1, z_2, z_3) + g_2(z_1, z_2, z_3)u + p_2(z1, z_2, z_3)w \\
\dot{z}_3 &= f_3(z_1, z_2, z_3) + g_3(z_1, z_2, z_3)u + p_3(z1, z_2, z_3)w \\
\tilde{y}_1 &= h_1(z_1) \\
\tilde{y}_2 &= z_2
\end{aligned}$$

Exempel, "kvotsystemet"

Plockar man ut “kvotsystemet” så får man

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{11} &= \frac{z_{12}}{z_2^2} = \frac{z_{12}}{\tilde{y}_2^2} \\
\dot{z}_{12} &= \theta_2 \tilde{y}_2 u_2 \\
\tilde{y}_{11} &= z_{11} \\
\tilde{y}_{12} &= z_{12}
\end{aligned}$$

Detta system kan man konstruera en vanlig olinjär observatör för och använda $r = y - \hat{y}$ som residual.

För den diagnoskunnige: Ta reda på relationerna, i det här fallet, mellan möjliga konsistensrelationer och kvotsystemet.

Slut i rutan

Tack för visat intresse, hoppas ni haft lika roligt som jag!